ChinaXiv合作期刊

第 40 卷 第 1 期
2022 年 3 月

天 文 学 进 展
PROGRESS IN ASTRONOMY

Vol. 40, No. 1
Mar., 2022

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2022.01.04

限制性及行星三体问题中的共轨运动研究回顾

谭 盼[1]，沈欣和[2]，侯锡云[1]，廖新浩[2]

(1. 南京大学 天文与空间科学学院，南京 210023； 2. 中国科学院 上海天文台，上海 200030)

摘要： 1/1 共振是限制性三体问题或行星三体问题中最低阶的平运动共振，平面圆型限制性三体问题中的 5 个平动点对应 1/1 共振的 5 个平衡点，束缚在不同的 1/1 共振态时，系统在空间中表现出不同的运动轨迹，如蝌蚪型轨道、马蹄型轨道等；而在大偏心率和高倾角下，系统存在其他类型的 1/1 共振态。太阳系内存在许多自然共轨系统，如木星的特洛伊小天体及土卫的共轨运动等；近年来，在近地空间中已探测到数十颗与地球共轨的小天体，在轨道的长期进动、大行星摄动等因素的影响下，这些小天体可能在不同的 1/1 共振态之间频繁地迁移。哈密顿系统和 Hill 三体问题是研究 1/1 共振的两种有效途径，按照一般摄动理论的常规做法，用哈密顿系统处理 1/1 共振的主要内容有：摄动函数展开、正则变换或平均化消除短周期项、理想共振模型及长期摄动理论等。在合适的摄动函数下，哈密顿系统可以研究 1/1 共振的全局动力学，另一方面，Hill 问题主要处理两个小质量天体的相对距离较近时的相对运动。限制性问题中的 Hill 方程是人们熟知的，而具有完全相同形式的一般 Hill 三体问题可以处理两个小天体质量均不为 0 的情形。在一定的假设下，一般 Hill 问题的运动方程可以写成与哈密顿系统的正则方程上相似的正则形式，由此可借助平均化方法建立长期摄动理论。除分析理论之外，亦可采用数值途径去研究 1/1 共振，如周期轨道族的数值延拓、庞加莱截面以及平衡点不变流形的计算等。

关 键 词： 三体问题；1/1 平运动共振；共轨运动

中图分类号： P132　　**文献标识码：** A

1 引 言

三体问题研究的是 3 个质量分别为 m_0, m_1, m_2 的质点在相互引力作用下的运动。当 $m_0 \gg m_1$, m_2 时，主天体 m_0 与 m_1 或 m_2 之间的引力远大于 m_1 与 m_2 之间的引力，此时，m_1 与 m_2 在空间中的运动可视作受到摄动的开普勒轨道，故 m_1 与 m_2 的

收稿日期： 2021-04-12； **修回日期：** 2021-09-26

资助项目： 国家自然科学基金 (11773017, 11973010)

通讯作者： 侯锡云，houxiyun@nju.edu.cn

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

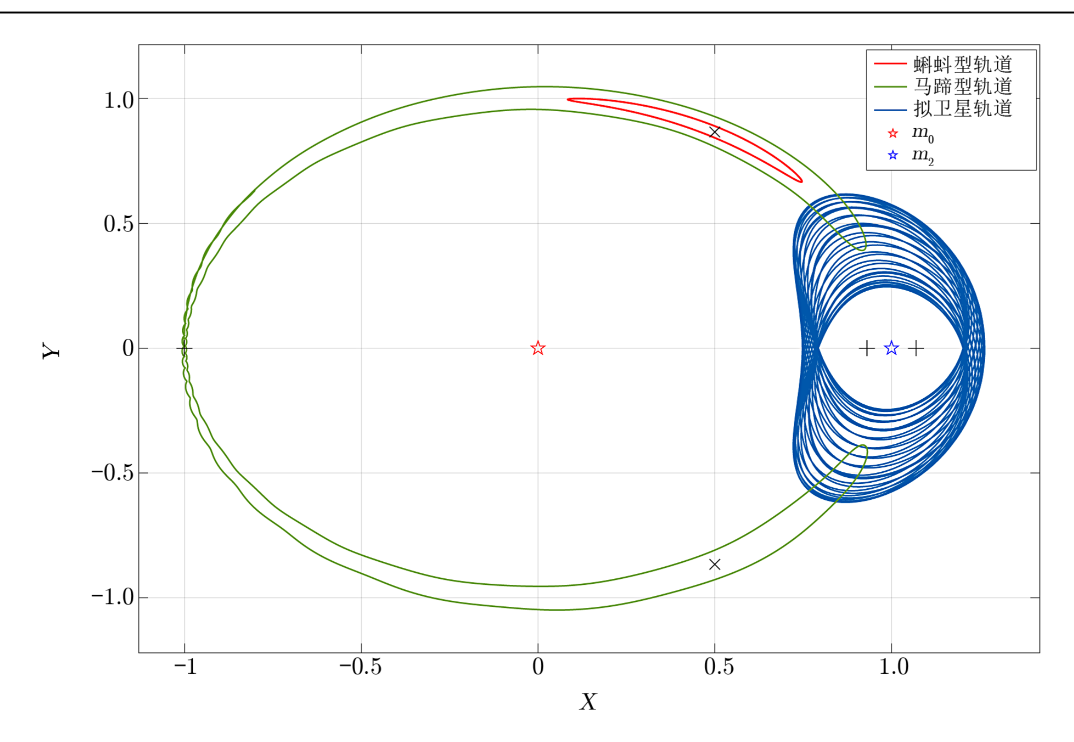
运动可从摄动理论出发作定性或定量的研究。对三体系统，可定义与质量有关的参数 $\mu = (m_1 + m_2)/(m_0 + m_1 + m_2)$，$\mu \ll 1$ 且 $m_1 \approx m_2$ 的情形被称作行星三体问题，而当 m_1/m_2 趋于 0 或无穷的情形被称作限制性三体问题。在太阳系中，太阳 (m_0)-小天体 (m_1)-行星 (m_2) 组成的三体系统的运动可近似为限制性问题，太阳 (m_0)-行星 1 (m_1)-行星 2 (m_2) 组成一个行星三体系统。容易想象，限制性或行星三体问题模型在系外行星、系外小行星、三星 (triple stars) 等自然天体系统的研究中同样可以找到适用的场景。共轨运动是三体系统中一类特殊的运动，其特征是 m_1 与 m_2 的轨道半长径相当 $(a_1 \approx a_2)$，若 m_1 与 m_2 的轨道偏心率和轨道倾角都很小，m_1 与 m_2 便几乎在同一轨道上运动，这解释了“共轨运动”的含义。对共轨运动更精确的说法是 1/1 平运动共振，即 m_1 与 m_2 的平经度之差 $(\lambda_1 - \lambda_2)$ 在某个值附近摆动，此时 $\lambda_1 - \lambda_2$ 的一阶导数 ($n_1 - n_2$，即平运动角速度之差) 接近于 0，且 m_1 与 m_2 的轨道周期相当，由开普勒第三定律，这对应着前面提到的共轨运动的特征；因为 $n_1 : n_2 \approx 1 : 1$，故称系统此时处在 1/1 平运动共振，且称 $\lambda_1 - \lambda_2$ 为 1/1 平运动共振的共振角。

为了结合实际的自然天体系统，人们一般关注的是限制性或行星三体系统在某参考系下稳定的共轨运动，这对应着 1/1 平运动共振中的稳定平衡点，当共振角 $\lambda_1 - \lambda_2$ 绕着不同的平衡点摆动时，系统在物理空间中表现出不同类型的轨迹，根据共振角的振幅大小，不同类型的运动对应着 1/1 共振局部或全局的动力学性质。在平面圆型限制性三体问题中，m_2 在一个固定的圆轨道上绕转 m_0，此时在一个与 m_2 共同绕转的旋转坐标系下 (称为会合坐标系) 研究 m_1 的运动是合适的；在会合坐标系下，m_1 的运动存在 5 个平衡点，即人们熟知的 3 个欧拉共线平动点 (L_1，L_2，L_3) 及 2 个拉格朗日三角平动点 (L_4，L_5)，当 $\mu < \mu_c = 0.038\ 52$ 时，L_4 和 L_5 在线性意义上是稳定的，系统存在着绕转 L_4 (或 L_5) 的蝌蚪型轨迹以及同时绕转 L_3，L_4，L_5 的马蹄型轨迹；m_2 是系统的一个物理碰撞奇点，而事实上，$\mu < 0.047\ 7$ 时系统存在着一族逆行绕转 m_2 的稳定周期轨道[1]，称为 f 族周期轨道，这一族周期轨道上偏心率较大的轨道在平均化系统中表现为位于 $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ 的 1/1 共振稳定平衡点[2]，而绕转这一稳定平衡点的轨道常称为拟卫星轨道。图 1 画出了典型的蝌蚪型轨迹、马蹄型轨迹以及拟卫星轨迹。当 m_2 为近圆轨道且小天体 m_1 为近圆、近平面轨道时，系统仍存在上面所述不同类型的共轨运动，但轨道的稳定性及稳定区域在轨道偏心率的摄动下可能发生变化。而当 m_1 的轨道偏心率和倾角较大时，系统可能存在不同于以上类型的 1/1 共振态，例如绕转 L_4, L_5 以及 m_2 的大振幅 1/1 共振轨道[3]，以及在不同的 1/1 共振态之间迁移的跃迁轨道[4]。

行星三体问题较限制性问题因系统自由度增加而更为复杂。行星三体问题中常用的坐标系有两个：日心坐标系和雅可比坐标系，而在共轨运动的研究中常用的是日心坐标系[5]。值得注意的是：由日心坐标及共轭动量导出的正则开普勒根数下，人们熟知的拉格朗日平动点不再对应着圆轨道，而是有一定偏心率的进动椭圆[6]。而在一些数值研究中[7, 8]，使用日心坐标及日心速度或由此导出的开普勒根数在物理上更加直观。在一个“合适”的转动坐标系下看 (可以是 x 轴与 m_1 固连的质心坐标系[7]，也可以是 m_1 与 m_2 之间的平均轨道[6])，行星三体问题中存在着与限制性问题类似的共轨运动类型。如在近圆近平面情形下，拉格朗日

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊



注：红色五角星为中心天体 m_0，蓝色五角星为行星 m_2。

图 1 平面圆型限制性三体问题中蝌蚪型轨道、马蹄型轨道及拟卫星轨道在会合坐标系 XY 平面上的投影

点附近存在蝌蚪型轨道和绕转 L_3, L_4, L_5 的马蹄型轨道，以及偏心率较大时的拟卫星轨道。在 $m_1 = m_2$, $a_1 = a_2$, $e_1 = e_2$ 情形下，Giuppone 等人[8]通过数值模拟发现，在三角平动点处存在一族反拉格朗日周期轨道，以 L_4 点为例，该族轨道上 m_1, m_2 的近星点的平经度相差为 240°，而不再是 60°。与限制性问题类似，行星三体问题中 1/1 共振轨道在不同系统参数下的稳定性及稳定区域是研究关注的重点之一。

太阳系内已发现许多 1/1 共振系统。表 1 列出了与大行星相关的共轨小天体数目，其中蝌蚪型轨道的数据来源于 IAU Minor Planet Center (MPC)①；而处在其他类型轨道的小天体尚未得到 IAU MPC 的确认，部分观测相关的参考文献可见于 Greenstreet 等人[9]的文章。1/1 共振系统也存在于太阳系行星的卫星系统中，土星的卫星中目前已知存在五个 1/1 共振系统：Calypso 和 Telesto 相对于 Tethys 的运动为蝌蚪型轨道，Helene 和 Polydeuces 相对于 Dione 的运动也为蝌蚪型轨道，Janus y与 Epimetheus 的相对运动为马蹄型轨道 (交换轨道)。Laughlin 和 Chambers[10]首先研究了在太阳系外发现共轨行星的可能性，并研究了稳定的共轨构型对应的系统参数范围。Giuppone 等人[11]研究了通过径向速度法探测太阳系外共轨行星的可能性。Goździewski 和 Konachi[12]通过分析径向速度信号指出 HD128311 和 HD82943 可能是行星共轨系统的两个宿主，但这一可能性未得到后续观测的证实[13]。事实上，截至目前，通过径向速度法或凌星法 (包括开普勒空间望远镜[14]) 还未在太阳系外确认

①https://minorplanetcenter.net/iau/lists/Trojans.html (accessed on 2021 June 14)

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

发现共轨行星系统[15, 16]。

表 1　目前已知的与太阳系大天体相关的 1/1 共振系统数目

行星	蝌蚪型轨道	马蹄型轨道	拟卫星轨道	跃迁轨道
金星	–	–	1	1
地球	1	5	5	4
火星	9	–	–	–
木星	$>10\ 000$	–	–	1
土星	–	–	–	4
天王星	1	–	–	–
海王星	28	–	–	–

注：跃迁轨道指在不同的 1/1 共振态间之间迁移的轨道。

三体问题可以从哈密顿系统的角度来研究，该方法能够比较容易地研究 1/1 共振全局或局部的动力学性质。主要过程是通过正则变化尽可能地降低系统的自由度，同时使得变换后的系统仍保留共轨运动主要的动力学性质。但是，哈密顿系统仍有一些技术性难题需要解决，如靠近碰撞奇点时展开式的收敛性问题、共轨运动的全局角作用量变量的显式表达式等。研究共轨运动另一有效的方法是 Hill 的三体问题模型，在这一模型下，共轨运动可分为两部分考虑：(1) 外部近似，当 m_1 与 m_2 距离较远时，系统由两个独立的开普勒轨道近似；(2) 内部近似，m_1 与 m_2 距离较近时，系统的运动由 Hill 方程描述。除了以上两种模型为代表的分析方法，数值积分及其衍生的结果是研究共轨运动最直接的途径，也是检验不同理论的基石，基于数值积分的周期轨道延拓和庞加莱截面是研究相空间结构的有力工具。第 2 章对哈密顿系统、Hill 三体问题等共轨运动研究中常用方法作简要介绍；第 3 章对共轨运动相关的动力学研究作简要回顾；第 4 章总结本文介绍的内容，并对未来可能的研究方向作简单的讨论。

2　模型简介

2.1　哈密顿系统

2.1.1　哈密顿函数

(1) 限制性三体问题

记 $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ 分别为 m_1, m_2 相对于 m_0 的日心距离矢量，r_i 为 $\boldsymbol{r}_i$ 的模。在一个 XY 平面与 m_2 轨道平面重合的惯性坐标系下，由牛顿万有引力定律，不难推导出小天体 m_1 的运动方程如下：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{r}_1 = -\frac{G\left(m_0+m_1\right)}{r_1^3}\boldsymbol{r}_1 + Gm_2\left(-\frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^3} - \frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2}{\left|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2\right|^3}\right) \quad . \tag{1}$$

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

由式 (1) 容易写出系统的拉格朗日函数：

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \frac{Gm_1\left(m_0+m_1\right)}{r_1} - Gm_1m_2\left(\frac{\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_1}{r_2^3} - \frac{1}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}\right) \quad . \tag{2}$$

由拉格朗日函数可推导出系统的共轭动量及哈密顿函数：

$$\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{r}_1} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_1} = m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 \quad , \tag{3}$$

$$H_1 = \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{r}_1}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_1 - L = \frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^2 - \frac{Gm_1\left(m_0+m_1\right)}{r_1} + Gm_1m_2\left(\frac{\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_1}{r_2^3} - \frac{1}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}\right) \quad . \tag{4}$$

考虑到 $m_1=0$，对哈密顿系统作以下等价变换：

$$H_1 \to H_1/m_1 \ , \quad \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{r}_1} \to \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{r}_1}/m_1 \quad .$$

则得到限制性三体问题的哈密顿函数：

$$H_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{r}_1}^2 - \frac{\mu_1}{r_1} + Gm_2\left(\frac{r_1}{r_2^2}\cos\psi - \frac{1}{\varDelta}\right) \quad , \tag{5}$$

其中，

$$\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{r}_1} = \dot{\boldsymbol{r}}_1 \ , \quad \mu_1 = G\left(m_0+m_1\right) \ , \quad \cos\psi = \frac{\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2}{r_1r_2} \ , \quad \varDelta = |\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2| \quad . \tag{6}$$

由小天体 m_1 的共轭坐标及动量 $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{r}_1}$ 可得到其开普勒根数 (a, e, i, $\varOmega$, ω, M)，这一变量变换不是正则的；$\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{r}_1}$ 与 Delaunay 根数之间的变换是正则的，Delaunay 根数定义如下：

$$\begin{cases} L_1 = \sqrt{\mu_1 a_1} \ , \quad G_1 = L_1\sqrt{1-e_1^2} \ , \quad H_1 = G_1\cos i_1 \\ l_1 = M_1 \ , \quad g_1 = \omega_1 \ , \quad h_1 = \varOmega_1 \end{cases} \quad . \tag{7}$$

以上变量在偏心率为零时不是良定的，为此我们采用无奇点的形式：

$$\begin{cases} L_1 = \sqrt{\mu_1 a_1} \ , \quad \tilde{G}_1 = L_1\left(\sqrt{1-e_1^2}-1\right) \ , \quad \tilde{H}_1 = \sqrt{\mu_1 a_1\left(1-e_1^2\right)}\left(\cos i_1 - 1\right) \\ \lambda_1 = M_1+\omega+\varOmega_1 \ , \quad \tilde{g}_1 = \omega_1+\varOmega_1 \ , \quad h_1 = \varOmega_1 \end{cases} \quad . \tag{8}$$

由于行星 m_2 在固定的开普勒椭圆上绕转 m_0，类似地可给出平面无奇点 Delaunay 根数：

$$\begin{cases} L_2 = \sqrt{\mu_2 a_2} = \text{const} \ , \quad \tilde{G}_2 = L_2\left(\sqrt{1-e_2^2}-1\right) = \text{const} \\ \lambda_2 = \lambda_{2,0} + n_2 t \ , \quad \tilde{g}_1 = \text{const} \end{cases} \quad , \tag{9}$$

其中，$\mu_2 = G(m_0+m_2)$，$n_2 = (\mu_2/a_2^3)^{(1/2)}$。式 (5) 通过 $\boldsymbol{r}_2$ 显含时间 t，可人为地引入一个新的自由度 (λ_2, $\varLambda_2$) 得到一个自洽的哈密顿系统：

$$H_1 = -\frac{\mu_1}{2a_1} + n_2\varLambda_2 + Gm_2\left(\frac{r_1}{r_2^2}\cos\psi - \frac{1}{\varDelta}\right) \quad . \tag{10}$$

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

(2) 行星三体问题

下面给出一般 N 体问题在正则日心坐标下的哈密顿函数的简单推导[5]，行星三体问题对应 $N=3$ 的情形。在一个空间惯性坐标系下，记 $(\boldsymbol{u}_i,\ \tilde{\boldsymbol{u}}_i = m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_i}{\mathrm{d}t})$ 为 m_i 的位置矢量和共轭动量，则容易写出系统的哈密顿函数：

$$H_2 = T + V\ ,\quad T = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\tilde{u}_i^2}{2m_i}\ ,\quad V = \sum_{i\neq j} -\frac{Gm_im_j}{|\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j|}\ . \tag{11}$$

日心坐标矢量及共轭动量 $(\boldsymbol{r}_i, \tilde{\boldsymbol{r}}_i)$ 定义如下：

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{u}_0\ ,\quad \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_0\ (i \geqslant 1)\ , \\ \tilde{\boldsymbol{r}}_0 = \sum\limits_{i=0}^{N-1} \tilde{\boldsymbol{u}}_i\ ,\quad \tilde{\boldsymbol{r}}_i = \tilde{\boldsymbol{u}}_i\ (i \geqslant 1)\ . \end{cases} \tag{12}$$

由系统总线动量守恒，$\tilde{\boldsymbol{r}}_0$ 为常数，则不妨设 $\tilde{\boldsymbol{r}}_0 = 0$。容易验证从 $(\boldsymbol{u}_i,\ \tilde{\boldsymbol{u}}_i)$ 到 $(\boldsymbol{r}_i,\ \tilde{\boldsymbol{r}}_i)$ 是一个正则变换，则哈密顿函数可重写为：

$$H_2 = \sum_{i=1}^{N-1}\left(\frac{\tilde{\boldsymbol{r}}_i^2}{2\beta_i} - \frac{Gm_0m_i}{|\boldsymbol{r}_i|}\right) + \sum_{i\neq j}\left(\frac{\tilde{\boldsymbol{r}}_i\cdot\tilde{\boldsymbol{r}}_j}{m_0} - \frac{Gm_im_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|}\right)\ , \tag{13}$$

其中，$\beta_i = m_0m_i/(m_0+m_i)$。容易看出，式 (13) 中第一个求和号中的项对应着 m_i 的开普勒运动，而第二个求和号中的项为摄动项。记 $(a_i,\ e_i,\ i_i,\ \varOmega_i,\ \omega_i,\ M_i)$ 是由 $(\boldsymbol{r}_i,\ \tilde{\boldsymbol{r}}_i/\beta_i)$ 决定的开普勒根数，则哈密顿函数可重写为：

$$H_2 = \sum_{i=1}^{N-1} -\frac{\mu_i\beta_i}{2a_i} + \sum_{i\neq j}\left(\frac{\tilde{\boldsymbol{r}}_i\cdot\tilde{\boldsymbol{r}}_j}{m_0} - \frac{Gm_im_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|}\right)\ . \tag{14}$$

值得注意的是，由式 (12) 可知 $\tilde{\boldsymbol{r}}_i \neq m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}$，故由 $(\boldsymbol{r}_i,\ \tilde{\boldsymbol{r}}_i/\beta_i)$ 决定的开普勒椭圆与实际速度方向并不相切[6]。与式 (7) 类似，可定义行星三体问题下的 Delaunay 根数：

$$\begin{cases} L_i = \beta_i\sqrt{\mu_ia_i}\ ,\quad G_i = L_i\sqrt{1-e_i^2}\ ,\quad H_i = G_i\cos i \\ l_i = M_i\ ,\quad g_i = \omega_i\ ,\quad h_i = \varOmega_i \end{cases}\ . \tag{15}$$

为解决偏心率 (轨道倾角) 为零时角度量 $\omega(\varOmega)$ 不是良定的问题，可类比式 (8), (9) 对幅角进行线性组合，引入无奇点形式的 Delaunay 根数。但在 $e=0$ 或 $i=0$ 时，无奇点形式的 Delaunay 根数中的作用量变量也等于 0，运动方程中会出现小分母现象，为解决这一问题可引入庞加莱无奇点变量[17, 18]，其具体形式不再叙述。

2.1.2　摄动函数展开

应用摄动理论的第一步是摄动函数展开，即将哈密顿函数中的摄动项展开为开普勒根数或其他正则变量的幂级数形式。引言中已经提到，共轨运动系统一般满足 $a_1 \approx a_2$，考

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

虑到较小轨道偏心率，进而有 $r_1 \approx r_2$，故使用 r_1/r_2 (或 r_2/r_1) 作为小量进行展开 (如人造地球卫星或等级式三体问题中的 Kaula 型展开[19, 20]) 一般并不适用。对于平运动共振 (包括 1/1 共振)，经典的展开方法是考虑系统近圆近平面运动，使用经典的椭圆展开式[21]，首先将摄动项展开为偏心率和轨道倾角的幂级数[5, 22]。由限制性或行星三体问题的哈密顿函数式 (10) 和 (14) 可知，其摄动项可分为两部分：直接项与间接项，其中直接项即为包含相对距离倒数 $1/|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$ 的项。事实上，使用椭圆展开中基本关系式以及位置速度矢量与轨道根数的转换关系[23]，对间接项进行展开并不困难，下面考虑直接项的展开，类似于式 (6)，重新记直接项为：

$$\frac{1}{\varDelta_{ij}} = \left(r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}} \ , \tag{16}$$

其中，$\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_j}{r_i r_j}$。假设 $O(e_i) = O(e_j) = O(i_i) = O(i_j) = \epsilon \ll 1$，则式 (16) 可表示为：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\varDelta_{ij}} = (A + Z_1 + Z_2)^{-\frac{1}{2}} \\ A = a_i^2 + a_j^2 - 2a_i a_j \cos\tau_{ij} \\ Z_1 = r_i^2 - a_i^2 + r_j^2 - a_j^2 \\ Z_2 = 2a_i a_j \cos\tau_{ij} - 2r_i r_j \cos\theta \\ \tau_{ij} = \lambda_i - \lambda_j \end{cases} . \tag{17}$$

由假设可知，$O(Z_1) = O(Z_2) = \epsilon$，若进一步假设 $O(A) = 1$，则由泰勒展开可得：

$$(A + Z_1 + Z_2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} A^{-\frac{2n+1}{2}} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} Z_1^{n-l} Z_2^l \ . \tag{18}$$

利用几何关系式[24]及椭圆展开式，可将 $Z_1^{n-l} Z_2^l$ 展开为 e_i，e_j，i_i，i_j 的幂级数。略去该幂级数的一般形式的推导，附录 A 给出了限制性三体问题及行星三体问题中直接项与间接项截断至 $O(\epsilon^2)$ 的展开式。在此种展开方式中，我们假设 $a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) = O(1)$，而这一条件对于共轨运动并不总是满足的。事实上，$a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$ 是 (A.3) 式的一个奇点，但这一奇点仅在 m_1 及 m_2 的轨道偏心率及轨道倾角均为 0 时才对应着系统的碰撞奇点，因此，$a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$ 是经典展开式 (A.3) 存在的一个技术性问题。已有研究指出[2, 25, 26]，受该奇点的影响，经典展开式在共轨运动中的拟卫星区域失效。式 (A.3) 另一个固有的限制是偏心率须小于拉普拉斯极限，且当轨道倾角较大时展开式收敛效果较差。

式 (A.3) 本质上是以零偏心率及零轨道倾角 ($e = i = 0$) 为参考值对 $1/\varDelta$ 进行展开。Ferraz-Mello 等人在对太阳系小天体平运动共振的研究中使用了另一种展开方式，即使用非零偏心率及轨道倾角 ($e = e_0$，$i = i_0$) 为参考值对 $1/\varDelta$ 进行展开，在平面限制性三体问题下；Ferraz-Mello[27]针对一阶平运动共振给出了这一展开方法的具体算法。Ferraz-Mello 和 Sato[28]将展开方法推广至更高阶平运动共振；Roig 等人[29]进一步推广至空间情形。这一方

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

法的限制在于：展开方法本质上是局部的，故可能不适用于较大振幅的共振轨道[3]；此外，其平均化需借助数值平均 (见下一节)，无法分析地完成。

关于摄动函数直接项展开还需提到的一点是，式 (A.3) 并不是一般意义上的完整摄动函数展开，因分母中还含有 $\cos(\lambda_1 - \lambda_2)$ 相关的项。然而，如果我们的研究目标是 1/1 平运动共振 (即 $\lambda_1 - \lambda_2$ 是共振角)，式 (A.3) 已经足够用来进行平均化以消除快变量[30] (见下一节)；另一方面，如果我们的研究目标是一般的平运动共振 (即 $p\lambda_1 - q\lambda_2 + \cdots$ 是共振角)，则还需进一步引入拉普拉斯系数将分母 I_n 展开为傅里叶级数形式[5]。还需提到的一点是，如果我们关注的是局部的 1/1 共振态，那么可以对分母 I_n 在共振角 $\lambda_1 - \lambda_2$ 的某个共振中心处展开，此时容易得到 1/1 共振局部的解[31, 32]。

2.1.3　正规化与平均化

引言中已经提到，处理哈密顿系统的基本思想是通过一系列变换 (正则变换等) 尽可能降低系统的自由度，同时使得变换后的系统保留原系统中我们关注的动力学性质。严格地说，想要降低系统的自由度，则必须找到相应的运动积分，对于限制性及行星三体问题则比较困难。引言中已经提到，这里所关注的共轨运动本质上是一个近可积系统，即 m_1 与 m_2 绕转 m_0 的开普勒运动受到相互引力的摄动。摄动理论中处理这样的系统有严格的方法，即借助哈密顿函数的幂级数形式，通过一系列正则变换将原哈密顿函数变换为一个截断至某个阶数 N 的正规化系统，同时保留一个摄动量级为 $N+1$ 的余项。若以上变换在 $N \to \infty$ 时仍收敛，则系统自由度的减少是严格的；若以上变换截断至某个有限阶数 N，则变换后的正规化系统可视作原系统的一个精确至 $O(\epsilon^{\mathrm{N}})$ 的近似。

与正规化对应的，降低系统自由度的另一方法是对哈密顿函数或运动方程直接进行“平均化”。“平均化”要求系统不同的自由度存在等级式的结构，即不同自由度的频率 (或特征时标) 的大小在不同的量级；容易理解，在较长时标下看，周期较短的自由度可视作短周期的“噪声”，对系统长期演化贡献的“均值”为零，这解释了“平均化”的含义。“平均化”的具体做法是对哈密顿函数或运动方程中短周期的幅角进行积分平均，变换后的系统中不再出现短周期幅角，故系统自由度自然减少。需要指出的是，对于多自由度系统，与正规化方式不同，平均化系统与原系统之间的关系尚无严格的理论，从这个角度看，平均化是一种经验性的做法[33]。

束缚于平运动共振的系统有一个共同的特征：系统不同的自由度存在等级式的结构，即不同自由度的频率 (或特征时标) 的大小在不同的量级。在 1/1 共振中，共轨天体的平运动是系统中周期最短的自由度，哈密顿函数中的开普勒项是平运动的可积近似。哈密顿系统的第一步便是通过正则变换或平均化消除平运动对应的自由度。将附录 A 中的展开式代入式 (10) 或式 (14)，即得到限制性或行星三体问题的哈密顿函数的展开形式 (不妨统一记为 H)，为引入 1/1 共振角，作以下正则变换：

$$\boldsymbol{h}: (L_1,\ \lambda_1,\ \Lambda_2,\ \lambda_2) \to (L_1,\ \tau = \lambda_1 - \lambda_2,\ J_2 = (L_1 + \Lambda_2),\ \lambda_2)\ \ , \tag{19}$$

其中，λ_2 对应着系统平运动的自由度。为消除这一自由度，可应用 Lie 变换[34]对系统进行

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

正规化，记正规化系统为 H^*，由生成函数可得到映射：

$$\boldsymbol{F}:\boldsymbol{\sigma}^*\rightarrow\boldsymbol{\sigma}\quad, \tag{20}$$

其中，$\boldsymbol{\sigma}$ 代表旧变量，$\boldsymbol{\sigma}^*$ 代表新变量。由式 (20) 可得：

$$H^*=H\circ\boldsymbol{F}^{-1}\quad, \tag{21}$$

且 H^* 中不再显含 λ_2^*。利用 Mathematica 等符号计算软件以及基于 Lie 变换的 Deprit 递推算法[17, 34]，在计算机上实现哈密顿系统正规化的计算并不困难。关于正规化最后需要指出的一点是，在对哈密顿系统 H 正规化之前，需首先对 H 中的项按其量级进行整理，若考虑小量为 $O(m_i)=O(e_i)=O(e_j)=O(i_i)=O(i_j)=\epsilon\ll 1$，则行星三体问题的哈密顿函数按量级表示为：

$$H_2=H_{2,1}^a+H_{2,2}^a+H_{2,3}^a+\cdots\quad. \tag{22}$$

在研究中，另一常用的做法是，在整理 H 中的项时仅考虑质量为小量，即 $O(m_i)=\epsilon\ll 1$，则行星三体问题的哈密顿函数表示为：

$$H_2=H_{2,1}^b+H_{2,2}^b\quad. \tag{23}$$

容易理解，第二种方法对量级的整理并不严格，但在偏心率及轨道倾角较小时，式 (23) 会给计算带来方便。事实上，无论使用式 (22) 或式 (23)，其正规化结果均含有无穷项，记式 (23) 的正规化结果为：

$$H_2^{b,*}=H_{2,1}^{b,*}+H_{2,2}^{b,*}+H_{2,3}^{b,*}+\cdots\quad. \tag{24}$$

由式 (20)，记由生成函数得到的新旧变量之间的映射为 $\boldsymbol{F}^b$。

前面提到，对哈密顿函数 H 直接进行积分平均可以得到平均化哈密顿 $\overline{H}$，

$$\overline{H}=\frac{1}{2\pi}\oint H\circ\boldsymbol{h}^{-1}\mathrm{d}\lambda_2\quad. \tag{25}$$

不难看出，式 (25) 等价于引入共振角后扔掉摄动函数表达式中显含 λ_2 的项，故从附录 A 推得限制性或行星三体问题的平均化哈密顿是十分直接的，以平面行星三体问题为例，其平均化哈密顿函数为：

$$\overline{H}_2=-\frac{\mu_1\beta_1}{2a_1}-\frac{\mu_2\beta_2}{2a_2}+Gm_1m_2(\varUpsilon_1-\varUpsilon_2)\quad, \tag{26}$$

其中，

$$\varUpsilon_1=\frac{m_0}{\sqrt{(m_0+m_1)\,(m_0+m_2)}}\frac{1}{\sqrt{a_1a_2}}\left[\left(1-\frac{e_1^2+e_2^2}{2}\right)\cos\tau+e_2e_1\cos\left(2\tau-\Delta\tilde{g}\right)\right]\quad, \tag{27}$$

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

$$\begin{aligned}\Upsilon_2 =& I_0+e_1^2\left[I_1\left(-\frac{3a_1^2}{4}-\frac{1}{2}a_2a_1\cos\tau\right)+I_2\left(\frac{3a_1^4}{4}+\frac{15}{8}a_2^2a_1^2-\frac{3}{2}a_2a_1^3\cos\tau-\frac{9}{8}a_2^2a_1^2\cos 2\tau\right)\right]+\\ & e_2^2\left[I_1\left(-\frac{3a_2^2}{4}-\frac{1}{2}a_1a_2\cos\tau\right)+I_2\left(\frac{3a_2^4}{4}+\frac{15}{8}a_1^2a_2^2-\frac{3}{2}a_1a_2^3\cos\tau-\frac{9}{8}a_1^2a_2^2\cos 2\tau\right)\right]+\\ & e_1e_2\left\{\begin{array}{l} I_1\left[\frac{1}{4}a_1a_2\cos(2\tau-\Delta\tilde{g})+\frac{9}{4}a_1a_2\cos\Delta\tilde{g}\right]+\\ I_2\left[\begin{array}{l}-\frac{9}{4}\left(a_2a_1^3+a_2^3a_1\right)\cos\Delta\tilde{g}+\frac{3}{4}\left(a_2a_1^3+a_2^3a_1\right)\cos(2\tau-\Delta\tilde{g})\\ +\frac{3}{8}a_2^2a_1^2\cos(3\tau-\Delta\tilde{g})+a_2^2a_1^2\left(\frac{27}{8}\cos(\tau+\Delta\tilde{g})-\frac{3}{4}\cos(\tau-\Delta\tilde{g})\right)\end{array}\right]\end{array}\right\}\end{aligned} \quad , \tag{28}$$

其中，$\Delta\tilde{g}=\tilde{g}_1-\tilde{g}_2$。前面提到，相比于正规化，平均化能够十分简单地降低系统自由度，但无法严格给出平均化系统与原系统的关系；尽管如此，根据式 (24)，不难发现：

$$\overline{H}_2 = H_{2,1}^{b,*} + H_{2,2}^{b,*} \ . \tag{29}$$

即在最低阶的情形下，平均化过程给出的平均哈密顿函数与正规化过程给出的哈密顿函数相同。式 (29) 一定程度上说明了平均化的有效性；除此之外，式 (29) 表明在一定精度下，映射 $\boldsymbol{F}^b$ 建立了 H_2 与平均化系统 $\overline{H}_2$ 之间的联系。图 2 给出了平面行星三体问题系统平均化的一个算例：给定初始平均根数 $\boldsymbol{\sigma}_0^*$，由式 (20) 得到初始瞬时根数 $\boldsymbol{\sigma}_0$，对完整系统 H_2 以 $\boldsymbol{\sigma}_0$ 为初始条件进行数值积分得到 $\boldsymbol{\sigma}(t)$，其结果对应图 2a) 中的运动轨迹及 b)−d) 中的灰色粗实线；对平均化系统 $\overline{H}_2$ 以 $\boldsymbol{\sigma}_0^*$ 为初始条件进行数值积分得到 $\overline{\boldsymbol{\sigma}}(t)$，其结果对应 b)−d) 中的红色虚线；由 $\boldsymbol{F}^b$ 及平均根数 $\overline{\boldsymbol{\sigma}}(t)$ 可得到 $\boldsymbol{F}^b\circ\overline{\boldsymbol{\sigma}}(t)$，其结果对应 b)−d) 中的蓝色或黄色曲线。

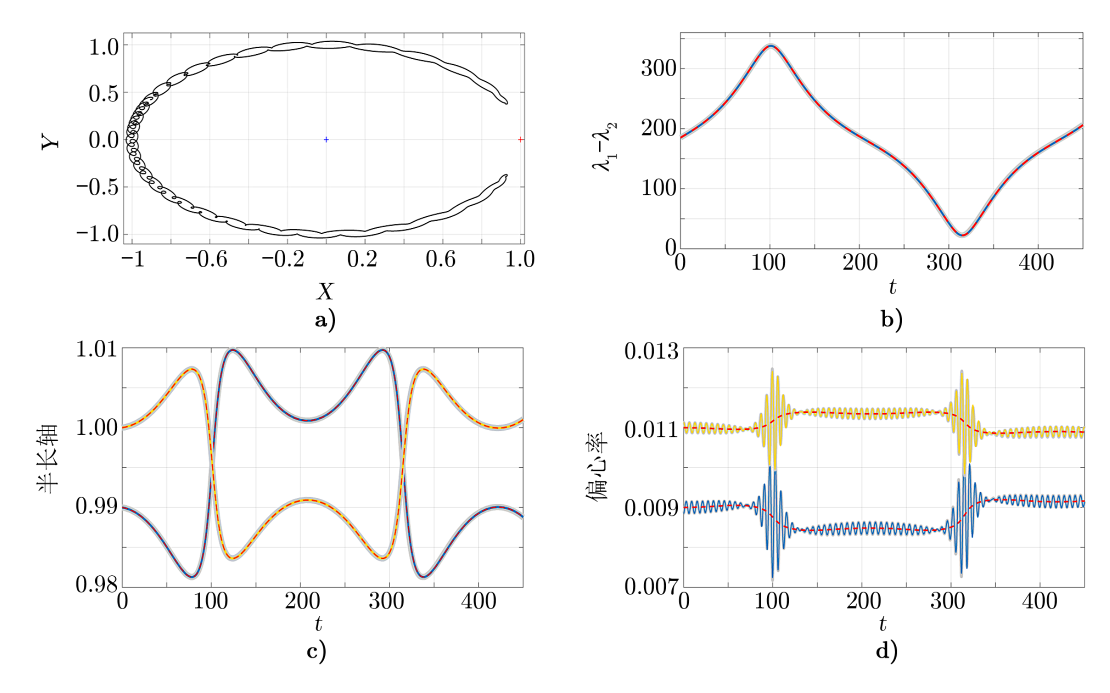
关于平均化还需提及的一点是，式 (25) 的积分平均可以不借助摄动函数的幂级数形式，而是直接使用摄动函数原来的定义，此时积分平均转为黎曼求和。以圆型限制性三体问题为例，式 (25) 转换为：

$$\overline{H}_1 = \frac{1}{2\pi}\oint H\circ h^{-1}\mathrm{d}\lambda_2 = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} H\circ h^{-1}\circ\left(\lambda_2 = 2\pi\frac{n}{N}\right) \ . \tag{30}$$

容易理解，在式 (30) 中，除了 λ_2 在计算中从 0 到 2π 遍历，其他轨道根数 $(\{\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2\}/\lambda_2)$ 均取为定值，故当 N 取充分大的有限值时，式 (30) 右端给出了平均化哈密顿函数 $H_{\{\boldsymbol{\sigma}_1,\,\boldsymbol{\sigma}_2\}/\lambda_2=\mathrm{const}}$ 的近似值。通过遍历 a_1 及 τ，便可在 1/1 共振项图上画出平均化哈密顿函数 $H_{\{\boldsymbol{\sigma}_1,\,\boldsymbol{\sigma}_2\}/\lambda_2=\mathrm{const}}$ 的等高图，实际上，这样得到的等高图能够反映系统相空间不同区域处 1/1 共振的性态。基于以上方法，图 3 给出了圆型限制性三体问题下的计算结果，图 3a) 给出了平面情形下 $e_1=0.25$ 时的 1/1 共振相图，图 3b) 给出了平面情形下 $e_1=0.3, i_1=36.8°$ 时的 1/1 共振相图。需要说明的是，用分析平均法得到的平均哈密顿函数 (例如式(26)) 去画相同的 1/1 共振相图，计算速度相比于数值平均方法会显著提高，然而，在靠近伪奇点 $a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos(\lambda_1-\lambda_2)=0$ 或碰撞奇点的区域，平均哈密顿函数给

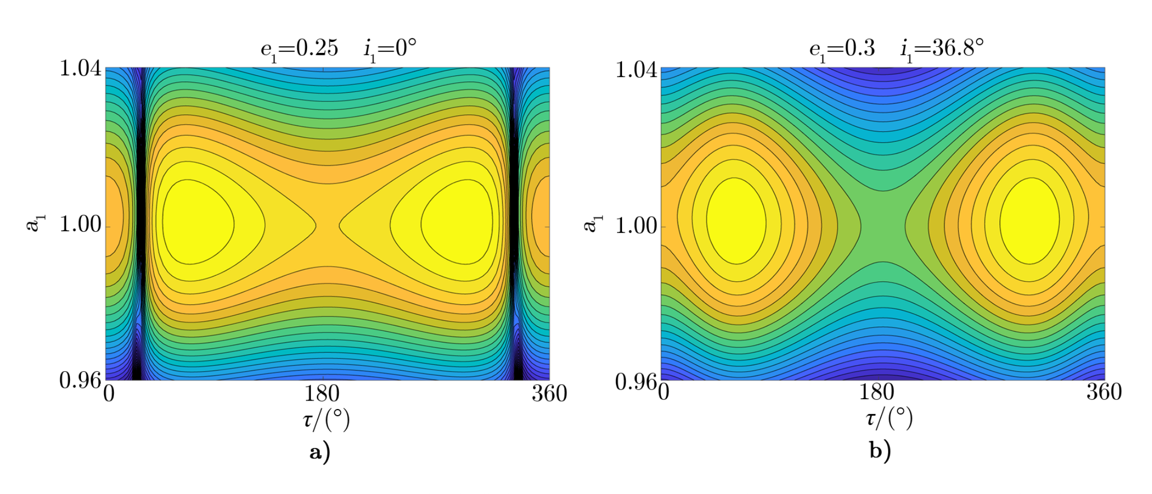
chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊



注：系统参数为 $m_1 = 10^{-4}$, $m_2 = 1.2 \times 10^{-4}$。a) 在一个随 m_1 转动的脉动会合坐标系下，m_0 处在 $(0, 0)$ (蓝色十字)，m_1 处在 $(1, 0)$ (红色十字)，黑色曲线给出了 m_2 相对于 m_1 在 XY 平面内的运动轨迹；b)−d)：m_2 的正则开普勒根数随时间的演化，其中灰色曲线为完整系统数值积分 $\boldsymbol{\sigma}(t)$，红色虚线为平均化系统数值积分 $\overline{\boldsymbol{\sigma}}(t)$，b) 中蓝色曲线为 $\boldsymbol{F}^b \circ \overline{\tau}(t)$，c) 与 d) 中蓝色 (黄色) 曲线分别为 m_1 (m_2) 的轨道根数 $\boldsymbol{F}^b \circ \overline{\boldsymbol{\sigma}}(t)$。

图 2　平面行星三体问题系统平均化算例



注：$\omega_1 = \Omega_1 = 0$。a) 深色部分对应着碰撞曲线，即 m_1 与 m_2 的物理碰撞奇点，$\tau = 0$ 处平衡点对应着完整系统下的 f 族周期轨道，平衡点附近运动即为拟卫星轨道[2, 26]；b)在较大轨道倾角处 $i_1 = 36.8°$，系统出现了绕转 L_4, L_5 及 m_1 的 1/1 共振轨道[3]。

图 3　圆型限制性三体问题数值平均得到的 1/1 共振相图

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

出的相图结构与图 3 会有定性的差异，这表明现有的分析方法在奇点附近的适用性受到限制，仍需改善。

2.1.4　理想共振模型

在消除平运动自由度后，1/1 共振角对应的自由度在系统中周期最短，若要通过正则变换进一步消除这一自由度，首先需在哈密顿函数中提取出 1/1 共振的可积近似 (即一自由度的理想共振模型，在正则摄动理论[17] 中常被称作 Hori kernel)。将 $e_1 = e_2 = 0$ 代入式 (26)—(28)，行星三体问题 1/1 共振的一个可积近似 (理想共振模型) 如下[6]：

$$H_2^{\dagger} = -\frac{\mu_1\beta_1}{2a_1} - \frac{\mu_2\beta_2}{2a_2} + Gm_1m_2\left(\frac{m_0}{\sqrt{(m_0+m_1)(m_0+m_2)}}\frac{\cos(\lambda_1-\lambda_2)}{\sqrt{a_1a_2}} - \frac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos(\lambda_1-\lambda_2)}}\right) \quad . \tag{31}$$

令

$$\begin{cases} \kappa_1 = \beta_1\sqrt{\mu_1}\ , \quad \kappa_2 = \beta_2\sqrt{\mu_2} \\ 2J_1 = \tilde{L}_1 - \tilde{L}_2 = \kappa_1\sqrt{a_1} - \kappa_2\sqrt{a_2}\ , \quad \theta_1 = \lambda_1 - \lambda_2 \\ 2J_2 = \tilde{L}_1 + \tilde{L}_2 = \kappa_1\sqrt{a_1} + \kappa_2\sqrt{a_2}\ , \quad \theta_2 = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \quad . \tag{32}$$

容易验证 $(\tilde{L}_1,\ \tilde{L}_2,\ \lambda_1,\ \lambda_2) \to (J_1, J_2, \theta_1, \theta_2)$ 是一个正则变换，在该变换下，$H_2^{\dagger}$ 仅显含共振角 $\theta_1 = \lambda_1 - \lambda_2$，故为一自由度可积哈密顿系统，$J_2$ 是一个运动积分。按照理想共振模型的处理方式[35]，下面将系统在共振中心处展开，根据 m_1 及 m_2 的无摄开普勒运动，θ_1 的共振中心定义为：

$$n_1 = n_2 \Leftrightarrow \frac{\mu_1}{a_1^3} = \frac{\mu_2}{a_2^3} \quad . \tag{33}$$

下面计算当式 (33) 成立时 J_1 的值 $J_{1,e}$，由式 (32) 得：

$$a_1 = \left(\frac{J_1+J_2}{\kappa_1}\right)^2 , \quad a_2 = \left(\frac{-J_1+J_2}{\kappa_2}\right)^2 \quad . \tag{34}$$

将式 (34) 代入式 (33)，可得：

$$J_{1,e} = \nu J_2\ , \quad \nu = \frac{\mu_1^{\frac{1}{6}}\kappa_1 - \mu_2^{\frac{1}{6}}\kappa_2}{\mu_1^{\frac{1}{6}}\kappa_1 + \mu_2^{\frac{1}{6}}\kappa_2} \quad . \tag{35}$$

定义两个新变量 J 与 u 如下：

$$J_1 = \nu J_2 + J\ , \quad u = \frac{J}{\kappa_1+\kappa_2} \quad . \tag{36}$$

将式 (36) 代入式 (34) 得：

$$\sqrt{a_1} = \sqrt{\bar{a}_1} + \frac{J}{\kappa_1}\ , \quad \sqrt{a_2} = \sqrt{\bar{a}_2} - \frac{J}{\kappa_2}\ , \tag{37}$$

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

$$\sqrt{\bar{a}_1} = \frac{(1+\nu)}{\kappa_1} J_2 \,, \quad \sqrt{\bar{a}_2} = \frac{(1-\nu)}{\kappa_2} J_2 \ . \tag{38}$$

由式 (37) 不难验证 $J = 0$ 正是由式 (33) 定义的共振中心

$$\frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_2} = \left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)^2 = \left(\frac{\mu_1^{\frac{1}{6}}\kappa_1}{\mu_2^{\frac{1}{6}}\kappa_2}\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)^2 = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{3}} .$$

将式 (37) 代入式 (31)，即可将哈密顿函数 $H_2^\dagger$ 在共振中心 $J = 0$ 处展开。注意到，此时 $H_2^\dagger$ 右端有 3 个小参数：

$$u \,, \quad \sigma_1 := \frac{m_1}{m_0} \,, \quad \sigma_2 := \frac{m_2}{m_0} \,.$$

由计算容易发现，式 (31) 中的开普勒项代入式 (37) 展开后，结果中关于 u 的一次方项为 0；为了使展开后系统截断至最低阶时保留原系统主要动力学性质，令 $O(u^2) = O(\sigma_1) = O(\sigma_2)$ (这一技巧源于 Karl Bohlin[17])。我们略去展开的具体细节，给出 $H_2^\dagger$ 展开至最低阶表达式：

$$H_2^{\dagger\dagger} = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\beta_1\bar{a}_1^2} + \frac{1}{\beta_2\bar{a}_2^2}\right)(\kappa_1+\kappa_2)^2 u^2 + \frac{Gm_0^2}{\sqrt{\bar{a}_1\bar{a}_2}}\sigma_1\sigma_2\left(\cos\theta_1 - \frac{1}{\sqrt{2\,(1-\cos\theta_1)}}\right) \ . \tag{39}$$

我们目的是得到 1/1 共振可积近似的角作用量变量，进而通过正则变换消去这一自由度，这一问题现在归结为求解 $H_2^{\dagger\dagger}$ 的角作用量变量。然而，通过计算不难发现，$H_2^{\dagger\dagger}$ 的哈密顿-雅可比方程的解无法简单地用初等函数写出 (有观点认为通过椭圆函数可能给出显式表达式[36, 37])，这是目前从摄动理论出发分析地研究 1/1 共振全局动力学的一个问题；事实上，即使能够写出可积近似的角作用量，因摄动函数中 1/1 共振角以 I_n 的形式出现，而不是一般的傅里叶级数形式，使用正则变换将系统正规化到高阶将十分困难。一个例子是 Garfinkel[38] 的广义理想共振模型理论，在该理论中 Garfinkel 使用超椭圆积分对一般的一自由度共振问题给出了二阶解，基于该解，Garfinkel 给出了平面圆型限制性问题下共轨运动极坐标的二阶解[39, 40]，该解具有全局的适用性。

最后，我们回到 1/1 共振可积近似 $H_2^\dagger$，图 4 给出了 $H_2^\dagger$ 的典型相图，以及与相流对应的会合坐标系下不同类型的运动轨迹。由图 4 可知，$H_2^\dagger$ 保留 1/1 共振近圆近平面时主要的动力学性质，即与 5 个平动点对应的 5 个平衡点，以及不同类型的 1/1 共振态 (蝌蚪型轨迹、马蹄型轨迹)。

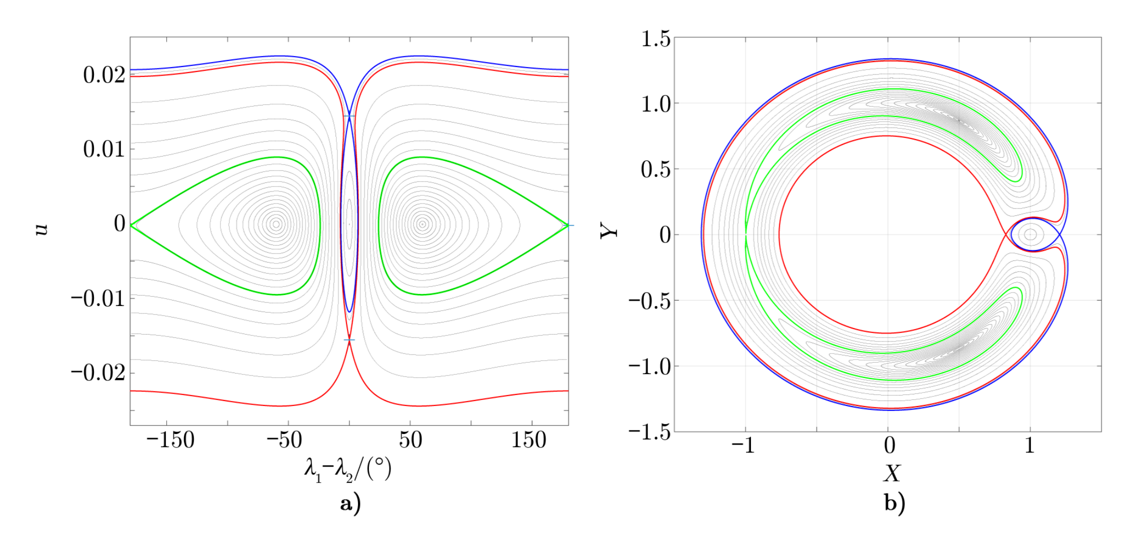
2.1.5 长期摄动理论

若通过正则变换能够消除原系统中 1/1 共振角对应的自由度，则变换后的系统给出了 $(\tilde{G}_i, \tilde{H}_i, \tilde{g}_i, h_i)$ 的演化，即描述了共轨运动的长期演化。然而，2.1.4 节已经提到，由于 1/1 共振的可积近似 (或称作理想共振模型) 的复杂性，经典的摄动理论难以消除 1/1 共振的自由度。考虑到关于哈密顿系统介绍的完整性，下面我们首先对限制性三体问题的 3/1 平运动共振的长期演化理论——主要是 Wisdom[41] 及 Henrard[42] 的工作，作简要介绍，进而对 1/1 共振长期演化理论作简单讨论。

Wisdom 等人使用经典的摄动方法处理了平面椭圆型限制性三体问题 3/1 平运动共振的长期演化。下面简单介绍其基本思想和方法，记 3/1 平运动共振的自由度为 $(\Phi,\ \phi =$

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊



注：系统参数为 $m_0 = 1$, $m_1 = 0.004$, $m_2 = 0.001$。a) 绿色曲线是从点 L_3 生发的分界线 (seperatrix)，即以点 L_3 为极限的同宿轨道；红色 (蓝色) 曲线为从点 L_1 (点 L_2) 生发的分界线。b) 中心天体 m_0 位于 (0, 0) 处，m_1 位于 (1, 0) 处，XY 平面上的轨迹给出了 m_2 在 m_0 和 m_1 的会合坐标系中的运动。绿色曲线包络的区域为绕转点 L_4 和 L_5 的蝌蚪型轨迹，在绿色曲线和红色曲线中间的轨迹对应马蹄型轨道。由于偏心率较小时拟卫星轨道并不出现在平均化系统中[2]，图中没有拟卫星区域。

图 4　行星三体问题 1/1 理想共振模型 H_0 的相图以及在轨线在会合坐标系的投影

$\lambda_1 - 3\lambda_2$)，另一与 $(\tilde{g}_1,\ e_1)$ 有关的自由度为 $(x,\ y)$，系统的哈密顿函数写为[41, 43]：

$$H_3 = -\frac{\mu_1^2}{2\varPhi^2} - 3\varPhi + A\left(x, y, e_2\right) + B\left(x,\ y,\ e_2\right)\cos\left(\phi - P\left(x,\ y\right)\right) + C\left(x,\ y,\ e_2\right)\cos\phi\ . \quad (40)$$

其中，A, B, C, P 均为已知函数，具体形式可参考文献 [41, 43]，假设 $O(x) = O(y) = O(e_2) = \epsilon$, $O(\varPhi) = 1$，则有 $O(A) = O(C) = \epsilon^2$, $O(B) = \epsilon$。Wisdom 进一步假设 $\|\dot{x}\|, \|\dot{y}\| \ll \dot{\phi}$，这实际上是平运动共振常见的特征，即不同自由度的频率 (周期) 大小在不同的量级。$x,\ y$ 在 $(\varPhi,\ \phi)$ 的特征时标下变化十分缓慢，则可以近似将变量 $x,\ y$ “冻结”，即取为常数，此时系统退化为一自由度。若将 H_3 中的无摄项 (即 $-\mu_1^2/2\varPhi^2 - 3\varPhi$) 在 3/1 共振平衡点处展开 (代入变换 $\varPhi = \varPhi_c + u$ 并展开，即 2.1.4 节中内容) 并省略高阶项，则系统退化为一自由度单摆：

$$H_3^{\dagger\dagger} = -\alpha u^2 + B\left(x,\ y,\ e_2\right)\cos\left(\phi - P\left(x,\ y\right)\right)\ \ , \quad (41)$$

其中，α 为正实数。利用椭圆积分，$H_3^{\dagger\dagger}$ 的哈密顿-雅可比方程可写出通解，具体细节可见文献 [41, 43]。简言之，我们能够由哈密顿-雅可比方程得到生成函数 $S(\phi,\ I)$，进而得到 $H_3^{\dagger\dagger}$ 的角作用量 $(I,\ \theta)$，以及 3/1 共振的显式解：

$$\varPhi(t) = \varPhi(I,\ \theta(t)),\quad \phi(t) = \phi(I,\ \theta(t))\ \ . \quad (42)$$

若认为 $H_3^{\dagger\dagger}$ 给出的 3/1 共振运动与完整系统 H_3 的结果相差不大，便可利用式 (42) 对哈密顿函数 H_3 或由 H_3 导出的哈密顿正则方程进行积分平均。由于 $\phi = \lambda_1 - 3\lambda_2$ 既可能处在循

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

环也可能振动，积分平均此时写为：

$$\langle f\rangle=\frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T}f\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int\limits_{\phi_{\min}}^{\phi_{\max}}f\frac{\mathrm{d}\phi}{\dot{\phi}}\ . \tag{43}$$

平均化哈密顿函数为：

$$\langle H_3\rangle=E\left(x,\ y,\ e_2\right)\langle\cos\phi\rangle+F\left(x,\ y,\ e_2\right)\langle\sin\phi\rangle\ \ , \tag{44}$$

其中，函数 E, F 由函数 A, B, C, P 导出。Wisdom[41] 附录中用正则绝热摄动理论[44] 给出了平均化系统 $\langle H_3\rangle$ 更严格的推导，其基本思想是将变量 x, y 的恒等变换加入生成函数 S，即

$$S'=S+x\overline{y}\ . \tag{45}$$

在由生成函数 S' 定义的正则变换下，可严格地导出新的哈密顿函数 H_3'，Wisdom 证明了当 H_3' 截断至低阶时 (不妨记为 H_3'')，由 S 定义的作用量 I 恰好是系统 H_3'' 的运动积分 (故是完整系统 H_3' 的一个“拟积分”)，且由 H_3'' 导出的哈密顿方程与平均化运动方程形式上完全一致，这说明了在哈密顿函数或哈密顿正则方程层面进行平均化是合理的。

前文已经提到，降低系统自由度必须找到相应的运动积分，对于近可积的系统，则需要找到其拟积分，在上面介绍的 Wisdom 等人的工作中，作用量 I 是原系统 3/1 共振自由度对应的一个拟积分。针对二自由度的近可积系统，Henrard 等人在经典的摄动方法基础上提出了一种“半数值”的摄动理论[42]，“半数值”的含义是指计算拟积分的理论基础就是经典的摄动理论，但 Henrard 等人不再局限于得到拟积分的分析表达式，而是试图对原系统任意一条轨道用数值方法在一定精度下得到其拟积分的具体数值。事实上，Henrard 等人给出的算法能够计算系统一个三维等能流形的一个横截面上任一点的拟积分数值。我们对这一思路作简单的解释：二自由度哈密顿系统若存在另一对合积分 (不妨也记为 I)，则系统可积；一般情况下，可积系统的相流微分同胚于二维环面[33]，考虑一个与相流相横截的二维平面，则微分同胚于二维环面的相流在二维截面上的投影是一个一维流形，而不同轨道 (投影的一维流形) 对应的积分 I 的取值必不同，故积分 I 在二维截面上的等高线即给出了等能面上的相流结构；若选取合适的截面，则此时只需计算截面上任意一点积分 I 的取值便可得到系统的长期演化相图。Henrard 等人考虑的二自由度哈密顿函数形式如下：

$$H_4=H_0\left(q_1,\ p_1,\ M\left(q_2,\ p_2\right)\right)+\varepsilon F\left(q_1,\ p_1,\ q_2,\ p_2\right)\ \ . \tag{46}$$

其中，$(q_1,\ q_2,\ p_1,\ p_2)$ 是正则变量，ε 是小参数，$H_0(q_1,\ p_1,\ M(q_2,\ p_2))$ 可分离故可积，给定初始条件 $(q_{1,0},\ q_{2,0},\ p_{1,0},\ p_{2,0})$，系统 H_0 决定了一条 (拟) 周期轨道，记 T_i 是自由度 $(q_i,\ p_i)$ 的周期，则系统角作用量分别为[42, 45]：

$$\begin{cases}\theta_1=2\pi\dfrac{t}{T_1}\ , & I_1=\dfrac{1}{2\pi}\oint p_1\mathrm{d}q_1\\[2ex] \theta_2=2\pi\dfrac{\tau}{T_2}\ , & I_2=\dfrac{1}{2\pi}\oint p_2\mathrm{d}q_2\ ,\quad \tau=\displaystyle\int\limits_{0}^{t}\left(\frac{\partial H_0}{\partial M}\right)\mathrm{d}t\end{cases}\ . \tag{47}$$

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

一般而言，只有 H_0 的形式非常简单时 (例如谐振子)，以上积分才可能显式地解出。Henrard 等人指出，当 H_0 形式十分复杂时，可以从计算的角度出发，利用式 (47) 计算一条给定的 (拟) 周期轨道的角作用量的具体数值，一般而言，相平面上的一条闭合轨道的作用量按定义即为轨迹所包围的面积，正负取决于定向。事实上，这正是 Henrard 等人的半数值摄动方法的基本思想，即通过经典的摄动理论导出系统关键量 (如作用量、本征频率、拟积分等) 的分析表达式，进而用轨道积分等数值方式对这些分析表达式进行数值估计。由式 (47) 得到的 I_1 及 I_2，可以分析或数值地反解出：

$$\begin{cases} q_1 = Q_1\left(I_1,\ I_2,\ \theta_1\right) \\ p_1 = P_1\left(I_1,\ I_2,\ \theta_1\right) \\ q_2 = Q_2\left(I_2,\ \theta_2 + \rho\left(I_1,\ I_2,\ \theta_1\right)\right) \\ p_2 = P_2\left(I_2,\ \theta_2 + \rho\left(I_1,\ I_2,\ \theta_1\right)\right) \end{cases} , \tag{48}$$

其中，

$$\rho\left(I_1,\ I_2,\ \theta_1\right) = \int_0^{\theta_1} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial I_2}\frac{\partial P_1}{\partial \theta_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial \theta_1}\frac{\partial P_1}{\partial I_2}\right) \mathrm{d}\theta_1 \ . \tag{49}$$

不难验证式 (48)是一个正则变换，将式 (48) 代入式 (46) 得：

$$K = K_0\left(I_1,\ I_2\right) + \varepsilon F\left(I_1,\ I_2,\ \theta_1,\ \theta_2\right) \ . \tag{50}$$

利用可积近似 K_0 对系统正规化，记系统无摄频率为：

$$\varOmega_1 = \frac{\partial K_0}{\partial I_1} \ , \quad \varOmega_2 = \frac{\partial K_0}{\partial I_2} \ . \tag{51}$$

定义泊松括号为：

$$\{f;g\} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial \theta_i}\frac{\partial g}{\partial I_i} - \frac{\partial f}{\partial I_i}\frac{\partial g}{\partial \theta_i} \ . \tag{52}$$

则显形式正则变换 (记生成函数为 W) 满足以下方程[17, 34]：

$$\bar{F}\left(I_1,\ I_2,\ \theta_1\right) = \frac{1}{2\pi}\oint F\left(I_1,\ I_2,\ \theta_1,\ \theta_2\right) \mathrm{d}\theta_2 \ , \tag{53}$$

$$-\left\{H_0;W\right\} = \varOmega_1\frac{\partial W}{\partial \theta_1} + \varOmega_2\frac{\partial W}{\partial \theta_2} = F\left(I_1,\ I_2,\ \theta_1,\ \theta_2\right) - \bar{F}\left(I_1,\ I_2,\ \theta_1\right) \ . \tag{54}$$

系统在 W 定义的变换下正规化到小参数的一阶量，此时系统的拟积分 $\bar{I}_2$ 定义为：

$$\bar{I}_2 = I_2 - \varepsilon\left\{I_2;W\right\} + O\left(\varepsilon^2\right) \ . \tag{55}$$

当摄动函数 F 可以展开为 θ_2 傅里叶级数形式时，Henrard 等人给出拟积分 $\bar{I}_2$ 基于式 (55) 的数值计算方法，具体细节这里不再叙述。

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

Henrard 等人[46]用以上半数值摄动方法研究了日木系的 3/1 平运动共振，并研究了与 Wisdom 等人摄动方法的差异。对比前面介绍的两种方法，可以看到 Wisdom 等人利用 3/1 共振的一个单摆近似式 (41) 直接得到了拟积分 I；而在半数值方法中，首先由可积近似 H_0 得到作用量 I_2，进而通过正规化将 I_2 修正到摄动的一阶量，即式 (55)。关于两种方法的对比还需提到的两点是：(1) 为了得到单摆近似进而求角作用量，经典摄动方法无一例外地在平衡点处对无摄项展开并截断至平方项 (2.1.4 节中由 $H_2^{\dagger}$ 导出 $H_2^{\dagger\dagger}$ 正是这一处理方法)，Henrad 等人指出这一做法使得截断系统的拓扑结构在远离平衡点处，特别是在分界线附近可能严重地偏离原系统，而通过数值方法计算给定轨道的角作用量不需要做此截断；(2) 式 (51) 即系统无摄频率同样可以用数值方法进行计算，则进而可以得到 $\varOmega_1$ 与 $\varOmega_2$ 成整数比，即次级共振的位置。

下面我们简单讨论以上介绍的长期摄动理论在 1/1 共振中的应用。1/1 共振中与式 (41) 的 $H_3^{\dagger\dagger}$ 对应的是式 (39) 的 $H_2^{\dagger\dagger}$，正如 2.1.4 节中提到的那样，$H_2^{\dagger\dagger}$ 的角作用量并不能简单地写出，故应用绝热摄动理论 (即式 (45)) 去显式地计算拟积分十分困难；需要指出的是，若考虑 1/1 共振的局部性态，则可将 $H_2^{\dagger\dagger}$ 在共振角的平衡位置处展开，此时哈密顿函数可再次简化为谐振子或单摆，进而可应用经典的摄动理论[47]。另一方面，依照式 (44) 沿着 1/1 共振可积近似决定的某一轨道对哈密顿函数或哈密顿正则方程进行积分平均是可行的[22]，若考虑系统平衡点处的长期演化，则平均化退化为将平衡点位置直接代入原哈密顿函数，这一做法在 1/1 共振中已有许多应用[3, 48–50]。从角作用量的计算来看，Henrard 等人的半数值摄动方法似乎十分适合 1/1 共振，然而，该方法基于经典摄动理论要求摄动函数能够展开为 1/1 共振角的傅里叶级数形式，而这一要求对于振幅较大的 1/1 共振是十分困难的 (见 2.1.2, 2.1.4 节)，如何将 Henrard 等人的半数值摄动方法应用在 1/1 共振上是一个值得研究的问题。

本节主要介绍了 1/1 共振在无其他摄动力下的长期摄动理论。当存在其他摄动，例如其他天体的引力摄动[22, 51]、太阳光压、Poynting-Robertson (P-R) 效应等辐射效应[52, 53]、行星盘的摄动或系统参数的缓慢变化时[16, 54]，系统 1/1 共振态的稳定性、稳定范围及长期演化是一个重要的研究方向。

2.2 Hill 三体问题

2.2.1 Hill 方程

记太阳、月球和地球质量分别为 m_0, m_1, m_2，则有 $m_1/m_2 \approx 1/80 \ll 1$, $\mu' = m_2/(m_0+m_2) \approx 3\times10^{-6} \ll 1$，故月球在地球、太阳的引力作用下的轨道运动可近似为限制性三体问题。为建立月球运动的中间轨道，Hill 在限制性三体问题的框架下进一步考虑了以下近似：(1) 月球在黄道面内运动，且地球和太阳的开普勒运动为圆轨道，则系统简化为平面圆型限制性三体问题；(2) 记月球和太阳与地球的距离分别为 r 和 R_1，则 $r/R_1 \approx 2.5\times10^{-3}$，故可以 r/R_1 和 μ' 为小量对摄动函数幂级数展开，并省略所有与 r/R_1 相关的项。考虑以上近似，在原点在地球的日地会合坐标系下，使用直角坐标，系统的运动方程退化为简单的代数

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

微分方程[21]：

$$\begin{cases} \ddot{X} - 2\dot{Y} = -\dfrac{\mu'}{R^3}X + 3X \\ \ddot{Y} + 2\dot{X} = -\dfrac{\mu'}{R^3}Y \end{cases} , \tag{56}$$

其中，(X, Y) 是月球的地心坐标，$R^2 = X^2 + Y^2$。在经典文献中，系统 (56) 被称为 Hill 问题，因式 (56) 是在一定假设下从限制性问题推导而来，故一段时间以来人们普遍认为 Hill 问题是限制性问题的一个子集，然而 Hénon 和 Petit[55] 首先指出，当

$$m_1 \ll m_0\,, \quad m_2 \ll m_0 \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon := \frac{m_1 + m_2}{m_0} \ll 1\ , \tag{57}$$

并且 m_1 与 m_2 的相对距离在 $(\mu')^{1/3}$ 量级时，m_1, m_2 相对运动的微分方程恰好与经典的式 (56) 有相同的形式，由此，Hill 问题实际上与限制性问题具有相同的“地位”：Hill 问题适用于一个天体的质量远大于其他两者的情形 (即式 (57))，而限制性问题适用于一个天体的质量远小于其他两者的情形，即

$$m_1 \ll m_2\,, \quad m_1 \ll m_0\ . \tag{58}$$

推导一般情形 (式 (57) 成立时) Hill 方程的主要思路是：在一个“平均”转动坐标系下，将 m_1, m_2 的运动解耦为 m_1, m_2 质心相对于 m_0 的运动以及 m_1, m_2 的相对运动。按“平均”转动坐标系为圆轨道或椭圆轨道之分，Hill 方程也有圆型及椭圆型之分，下面给出平面椭圆型 Hill 方程的推导[56]。惯性系下，m_1, m_2 相对于中心天体 m_0 的位置矢量 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ 满足微分方程：

$$\begin{cases} \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -(1+\varepsilon\mu_1)\dfrac{\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_1|^3} + \varepsilon\mu_2\left(-\dfrac{\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_2|^3} + \dfrac{\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{d}|^3}\right) \\ \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = -(1+\varepsilon\mu_2)\dfrac{\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_2|^3} + \varepsilon\mu_1\left(-\dfrac{\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_1|^3} - \dfrac{\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{d}|^3}\right) \end{cases} . \tag{59}$$

其中通过对单位归一化，使得 $G = 1$, $m_0 = 1$，并且

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1\,, \quad \varepsilon = \frac{m_1 + m_2}{m_0}\,, \quad \mu_k = \frac{m_k}{m_1 + m_2},\ \ k = 1,\ 2\ . \tag{60}$$

引入 m_1, m_2 的质心：

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} = \mu_1\boldsymbol{r}_1 + \mu_2\boldsymbol{r}_2\ , \tag{61}$$

不难得到以下关系：

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} - \mu_2\boldsymbol{d}\,, \quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} + \mu_1\boldsymbol{d}\ . \tag{62}$$

将式 (62) 代入式 (59)，不难得到：

$$\begin{cases} \ddot{\boldsymbol{R}} = (1+\varepsilon)\left(-\mu_1\dfrac{\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_1|^3} - \mu_2\dfrac{\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_2|^3}\right) \\ \ddot{\boldsymbol{d}} = \dfrac{\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_1|^3} - \dfrac{\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_2|^3} - \varepsilon\dfrac{\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{d}|^3} \end{cases} . \tag{63}$$

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

考虑 m_1, m_2 相互距离为小量，即令

$$O(R) = 1\,, \quad O(d) \ll 1\ . \tag{64}$$

此时，不难得到以下展开式：

$$\begin{cases} |\boldsymbol{r}_1|^{-3} = \dfrac{1}{R^3} + 3\dfrac{\mu_2 \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{d}}{R^5} + O\left(d^2\right) \\ |\boldsymbol{r}_2|^{-3} = \dfrac{1}{R^3} - 3\dfrac{\mu_1 \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{d}}{R^5} + O\left(d^2\right) \end{cases} . \tag{65}$$

其中，$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{d}$ 为矢量的点乘，将式 (62), (65) 代入系统 (63)，可得

$$\begin{cases} \ddot{\boldsymbol{R}} = (1+\varepsilon)\left(-\dfrac{\boldsymbol{R}}{R^3} + O\left(d^2\right)\right) \\ \ddot{\boldsymbol{d}} = -\varepsilon\dfrac{\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{d}|^3} - \dfrac{\boldsymbol{d}}{R^3} + 3\dfrac{(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{d})\,\boldsymbol{R}}{R^5} + O\left(d^2\right) \end{cases} . \tag{66}$$

令

$$\boldsymbol{d} = \varepsilon^{1/3}\,\boldsymbol{r} \quad \Rightarrow \quad d = \varepsilon^{1/3}\,r\ , \tag{67}$$

将式 (67) 代入系统 (66)，可得

$$\begin{cases} \ddot{\boldsymbol{R}} = -\dfrac{\boldsymbol{R}}{R^3} + O\left(\varepsilon^{2/3}\right) \\ \ddot{\boldsymbol{r}} = -\dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} - \dfrac{\boldsymbol{r}}{R^3} + 3\dfrac{(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{R}}{R^5} + O\left(\varepsilon^{2/3}\right) \end{cases} . \tag{68}$$

在给出进一步的推导之前，我们对式 (64) 和式 (67) 做简单解释：式 (64) 的近似表明系统 (66) 适用于描述 m_1, m_2 相互交会时系统的运动，并且此时系统的质心运动从完整运动方程中解耦；由于式 (67) 给出量级估计，因此系统 (68) 截断至小量 d, ε 的零阶时保留了最多的项，且此时系统不再含任何参数，从物理上看，$d=\varepsilon^{1/3}$ 正是 Hill 半径的定义，此时 m_1, m_2 的相互引力作用与 m_0 的中心引力在同一量级，故此时运动方程截断至小参数的零阶项时 (即系统 (68)) 保留了两种相互作用的零阶项。下面继续推导椭圆型 Hill 方程，为简化记号，将二维实矢量 $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{r}$ 视为复变量$\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{r} \in \mathbb{C}$，不难验证，矢量的点积 $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}$ 在复数运算下可表示为：

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r} = \mathrm{Re}\left(R^2\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{R}}\right)\ , \tag{69}$$

其中，Re 代表求实部。为了在随质心 $\boldsymbol{R}$ 一同运动的脉动会合坐标系下考虑相对运动，引入复变量 $\boldsymbol{z}$，

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{z}\ . \tag{70}$$

由式 (70)，不难推得 $\boldsymbol{z}$ 的含义为脉动会合坐标系下 m_1 和 m_2 的相对运动矢量的复数形式。将式 (70) 代入式 (68) 的第二式，结合式 (68) 的第一式及式 (69)，不难验证

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{1}{\boldsymbol{R}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\boldsymbol{z}}{|\boldsymbol{R}\boldsymbol{z}|^3} + \frac{3}{R^3}\,\mathrm{Re}\,\boldsymbol{z}\ . \tag{71}$$

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

式 (71) 为脉动会合坐标系下的相对运动方程。由式 (68) 的第一式，m_1, m_2 质心近似作开普勒运动，则有以下关系：

$$\boldsymbol{R} = R\exp(is) \ , \quad R = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos s} \ , \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{a\left(1-e^2\right)}}{R^2} \ . \tag{72}$$

为了进一步简化系统 (71)，做以下时间尺度变换：将对时间 t 的求导变换为对真近点角 s 的求导，由式 (72) 不难验证以下关系：

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^2} = A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} + B\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} \ , \quad A = -2\frac{e\sin s}{R^3} \ , \quad B = \frac{a\left(1-e^2\right)}{R^4} \ , \\
&B^{-1}A = \frac{-2e\sin s}{1+e\cos s} \ , \quad 2\frac{1}{\boldsymbol{R}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}s} = \frac{2e\sin s}{1+e\cos s} + 2i \ , \quad \frac{1}{BR^3} = \frac{1}{1+e\cos s} \ .
\end{aligned} \tag{73}$$

将式 (73) 代入式 (71)，可得：

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}s^2} + 2i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}s} + \frac{1}{1+e\cos s}\left(\frac{\boldsymbol{z}}{|\boldsymbol{z}|^3} - 3\,\mathrm{Re}\,\boldsymbol{z}\right) = 0 \ . \tag{74}$$

式 (74) 即为椭圆型 Hill 方程。令 $e=0$, $\boldsymbol{z} = x+iy$，则系统 (74) 退化为圆型 Hill 方程：

$$\begin{cases}
\ddot{x} - 2\dot{y} + \left(x^2+y^2\right)^{-3/2} x - 3x = 0 \\
\ddot{y} + 2\dot{x} + \left(x^2+y^2\right)^{-3/2} y = 0
\end{cases} \ . \tag{75}$$

不难发现，系统 (75) 与经典的 Hill 方程 (见 (56) 式) 有相同的形式，且不含任何参数，由于不含任何参数，当 m_1 与 m_2 很小时 (例如接近或小于计算机的机器精度时)，系统 (74) 或 (75) 比完整的三体运动方程 (例如系统 (59)) 更适合数值积分[57]。

2.2.2　平面圆型 Hill 方程的解

系统 (75) 存在两个平衡点 $\left(3^{-1/3}, 0\right)$，分别对应于圆型限制性三体问题中的 L_1 及 L_2 点；系统 (75) 并不存在与 L_3 点对应的平衡点，原因在于推导过程中式 (64) 所作的假设，以及在推导中去掉了所有与视差项 (d/R) 相关的项，因此在以上假设与近似下，m_0 以及 L_3 点的位置在 $-\infty$ 处，自然无法出现在系统 (75) 中。类似于圆型限制性三体问题，圆型 Hill 方程 (见式 (75)) 存在形式如下的运动积分 h：

$$h = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) - \left(x^2+y^2\right)^{-1/2} - \frac{3}{2}x^2 \ . \tag{76}$$

系统 (75) 在一定近似下可以给出分析解，下面介绍相关内容。Dermott 和 Murray[58] 对圆型限制性三体问题中的马蹄型轨道进行了系统的数值研究，他们将小天体 m_1 放在与 m_2 的初始相位相差 180° 的位置上，固定 m_2 的轨道半长径，在不同的初始半长径 a_1 下积分 m_1 的轨道，数值积分发现当 $a_r \triangleq a_1 - a_2$ 接近于零时，m_1 运动在几乎对称的马蹄型轨道上。下面从Hill方程角度研究这一情形，进而从系统 (75) 导出一个具有类似特征的解。从物理直观上看，$h \approx 0$ 意味着初始 $x_0 \approx 0$；m_1 与 m_2 的初始轨道相位差为 180°，从在 Hill 方程的近

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

似式 (64) 下意味着初始 $y_0 \approx \infty$；而一条几乎对称的马蹄型轨迹在Hill坐标 $(x,\ y)$ 下表现为一条关于 $x=0$ 对称的 U 型轨迹，若 $x_0>0$，则 x 单调减小，而 $\dot{y}$ 的符号与 x 符号相反，可以猜测 $\dot{y}\propto -x$。由以上分析，在系统 (75) 第一式中令 $(x^2+y^2)^{-3/2}=0,\ \ddot{x}=0$，则

$$\dot{y}=-\frac{3}{2}x \quad . \tag{77}$$

将式 (77) 代入系统 (75) 的第二式，得：

$$\dot{x}=-\frac{2}{y^2} \quad . \tag{78}$$

将式 (77) 与式 (78) 相除，分离变量后积分得到：

$$y=\frac{8}{3\left(c^2-x^2\right)} \quad . \tag{79}$$

式 (79) 给出的正好是一条 U 形轨迹，且运动积分 c 即为 $y\approx\infty$ 时的“碰撞参数”h。通过数值积分发现[56]，当 $c<0.7$ 时，式 (79) 给出了原系统 (见式 (75)) 数值积分轨迹非常精确的近似。

当 $m_1,\ m_2$ 距离充分大以至于它们的相互引力可以忽略时，即 $(x^2+y^2)^{-3/2}\rightarrow 0$，式 (75) 简化为：

$$\begin{cases}\ddot{x}-2\dot{y}-3x=0\\ \ddot{y}+2\dot{x}=0\end{cases} \quad . \tag{80}$$

系统 (80) 是一个常系数齐次微分方程组，其通解为：

$$\begin{cases}x=C_1+C_2\cos\left(t-t_1\right)\\ y=-\dfrac{3}{2}C_1\left(t-t^*\right)-2C_2\sin\left(t-t_1\right)\end{cases} \quad , \tag{81}$$

其中，$C_1,\ C_2,\ t^*,\ t_1$ 是运动积分，事实上，这些运动积分有明确的物理意义，因为系统 (80) 忽略 $m_1,\ m_2$ 的相互引力，此时 $m_1,\ m_2$ 作固定的开普勒运动，故式 (81) 为 Hill 方程的无摄解，此时可以建立 $C_1,\ C_2,\ t^*,\ t_1$ 与 $m_1,\ m_2$ 轨道根数的函数关系，相关推导可见 2.2.4 节。

式 (81) 对应着 $t\rightarrow\infty$ 时系统的解，由式 (81) 第二式 $y\propto t$，故式 (81) 也可视为 $y\rightarrow\infty$ 时系统的解。一个自然的想法是：能否找到一组以 $1/t$ 或 $1/y$ 为小参数的幂级数解，使得当 $t\rightarrow\infty$ (或 $y\rightarrow\infty$) 时，该幂级数解渐近逼近于解 (81)。Spirig 和 Waldvogel[56] 以及 Hénon 和 Petit[55] 分别给出了一族四参数渐近逼近解，以 $1/t$ 为小参数的解的形式如下[56]：

$$x=\sum_{j=0}^{\infty}t^{-j}\sum_{k=0}^{j}a_{jk}\left(t\right)l^k\ ,\quad y=\sum_{j=0}^{\infty}t^{1-j}\sum_{k=0}^{j}b_{jk}\left(t\right)l^k\ ,\quad l=\lg\frac{t}{t_0} \quad . \tag{82}$$

其中，$a_{jk}(t),\ b_{jk}(t)$ 是时间 t 的三角函数多项式 (包括常数)。可以看到，式 (82) 并不是常见的幂级数解，而是包含了时间 t 的对数项，这使得 $t\rightarrow\infty$ 时，式 (82) 实际上并没有收敛

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

于 Hill 方程无摄解 (即式 (81))。Hénon 和 Petit[55] 给出了以 $1/y$ 为小参数的渐近逼近解，该解同样包含 y 的对数项。前文已经提到，Hill 方程的无摄解可以看作系统的外部近似，即当 m_1 与 m_2 的相对距离与 m_1, m_2 质心到 m_0 的相对距离在同一量级时的系统运动的近似，而当 m_1 与 m_2 近距离交会时，完整 Hill 方程的数值积分可看作原系统运动的高精度的内部近似，而式 (82) 给出的渐近逼近解恰好是内部近似与外部近似的“桥梁”。因此，Hill 方程被用来处理一类称之为“卫星遭遇” (satellite encounter) 的问题[57]。这一类问题的特点是：m_1 与 m_2 初始距离较远，由于半长径不同而在空间中靠近，在有限的时间内处于近距离的相互作用阶段，然后在相互引力作用下再次互相远离。以圆型 Hill 方程为例，应用式 (82) 研究“卫星遭遇”问题的具体方法是：式 (82) 中的四个运动积分对初始状态空间参数化，m_1 与 m_2 的初始靠近阶段由式 (82) 给出；当 m_1 与 m_2 的距离小于某个阈值时 (该阈值取决于式 (82) 的精度，进而取决于式 (82) 的阶数以及设定的误差阈值)，系统的运动由完整Hill方程数值积分给出；在相互引力作用下当 m_1 与 m_2 的相互距离大于给定阈值时，系统的运动再次由渐近解给出。

2.2.3　圆型 Hill 方程的正则形式

在哈密顿系统中我们看到，通过定义合适的正则变量 (即定义 1/1 共振角等)，系统不同自由度的特征时标在不同的量级，进而可以使用正规化或平均化消除系统的快变量。2.2.2 节提到，圆型 Hill 方程的无摄解可以与 m_1, m_2 的开普勒根数建立联系，而开普勒根数可进一步转换为 Delaunay 根数等正则变量，这启发我们通过 Hill 方程的无摄解引入 m_1, m_2 的开普勒根数，进而对 m_1 和 m_2 的相对运动定义一组合适的正则变量，若这组变量同样具有等级式的特征 (事实上的确如此)，则可类比于哈密顿系统对 Hill 方程或 Hill 方程的能量积分进行平均化消除快变量，进而研究平均化系统的动力学性质。Namouni[4] 在工作中首先给出了 Hill 方程的正则形式，下面对这一形式作简单介绍。考虑三维情形的圆型 Hill 方程，即在系统 (75) 中加入 Z 方向的运动，可得：

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} + \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} x - 3x = 0 \\ \ddot{y} + 2\dot{x} + \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} y = 0 \\ \ddot{z} + z + \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} z = 0 \end{cases} . \tag{83}$$

空间圆型 Hill 方程 (见系统 (83)) 的无摄解为：

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2\cos(t-t_1) \\ y = -\dfrac{3}{2}C_1(t-t^*) - 2C_2\sin(t-t_1) \\ z = C_3\sin(t-t_2) \end{cases} , \tag{84}$$

其中，$\boldsymbol{S} = \{C_1,\ C_2,\ C_3,\ t^*,\ t_1,\ t_2\}$ 是运动积分，下面我们建立 $\boldsymbol{S}$ 与 m_1, m_2 的开普勒根数的函数关系。由式 (62), (67) 及 (70) 得：

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R}\left(1-\mu_2\varepsilon^{1/3}\,\boldsymbol{z}\right) \quad , \quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}\left(1+\mu_1\varepsilon^{1/3}\,\boldsymbol{z}\right) \quad , \tag{85}$$

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

此时 $\boldsymbol{z} = (x,\ y,\ z)$ 由 Hill 方程无摄解 (式 (84)) 给出，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{r}_1 = \ & 1 - \mu_2\varepsilon^{1/3}\, C_1 - \mu_2\varepsilon^{1/3}\, C_2 \cos{(t-t_1)} + \mu_2\varepsilon^{1/3}\, \frac{3}{2} C_1\, (t-t^*) + \\ & 2\mu_2\varepsilon^{1/3}\, C_2 \sin{(t-t_1)} - \mu_2\varepsilon^{1/3}\, C_3 \sin{(t-t_2)} \quad . \end{aligned} \tag{86}$$

$\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{r}_2$ 有类似的表示式，这里不再列出。式 (86) 中 $\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{r}$ 代表 m_1 在由质心运动 (即 $\boldsymbol{R}$) 所决定的脉动会合坐标系下的运动。事实上，$\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{r}$ 可视作 m_1 相对于“本轮”(即 $\boldsymbol{R}$) 所作的“均轮”运动 (epicyclic motion)。由于所考虑的是圆型 Hill 方程，此时 $\boldsymbol{R}$ 对应一个开普勒圆轨道，记该圆轨道的轨道半长径为 a'，轨道角速度为 n'，因 $m_0 = 1, m_1, m_2 \ll m_0$，有 $n' = a'^{-3/2}$；记 m_i 的轨道半长径为 a_i，则由式 (64) 得：

$$O(a_j - a') = O(e_j) = O(i_j) = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \cos i_j \approx 1 \ , \quad \sin i_j \approx i_j \ , \tag{87}$$

其中，$j = 1,\ 2$，e_j, i_j 分别为 m_j 的轨道偏心率及轨道倾角。下面从开普勒根数出发推导 m_1 在本轮 $\boldsymbol{R}$ 下的均轮运动表达式，在一个以 n' 为角速度的匀速转动坐标系下，考虑到式 (87)，m_1 的位置矢量 $\bar{\boldsymbol{r}}_1$ 为：

$$\bar{\boldsymbol{r}}_1 = R_z\,(n't)\,\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} r_1 \cos{(f_1 + \tilde{\omega}_1 - n't)} \\ r_1 \sin{(f_1 + \tilde{\omega}_1 - n't)} \\ i_1 r_1 \cos{(f_1 + \omega_1)} \end{pmatrix} \quad , \tag{88}$$

其中，f_1, ω_1, Ω_1, $\tilde{\omega}_1 = \omega_1 + \Omega_1$ 分别是 m_1 轨道的真近点角、近点角距、升交点经度和近点角经度。考虑到 $O(e_j) = O(i_j) = \varepsilon$，对式 (88) 右端进行椭圆展开并截断至 ε 一阶项，得：

$$\bar{\boldsymbol{r}}_1 = a_1 \begin{pmatrix} \left(\cos{(M_1 - n't + \tilde{\omega}_1)} + \frac{1}{2} e_1\, (\cos{(2M_1 - n't + \tilde{\omega}_1)} - 3\cos{(n't - \tilde{\omega}_1)})\right) \\ \left(\sin{(M_1 - n't + \tilde{\omega}_1)} + \frac{1}{2} e_1\, (\sin{(2M_1 - n't + \tilde{\omega}_1)} + 3\sin{(n't - \tilde{\omega}_1)})\right) \\ i_1 \left(\frac{1}{2} e_1\, (\sin{(2M_1 + \omega_1)} - 3\sin{\omega_1}) + \sin{(M_1 + \omega_1)}\right) \end{pmatrix} + O\,(\varepsilon) \ . \tag{89}$$

在式 (64) 的假设下，我们得到 $n'\left(t - t^{\dagger}\right) - (M_1 + \tilde{\omega}_1) = O\,(\varepsilon)$，其中 $t^{\dagger}$ 取决于空间惯性系 X 轴的选取，令 $t^{\dagger} = 0$，则式 (89) 可简化为：

$$\bar{\boldsymbol{r}}_1 = \begin{pmatrix} a_1 - a_1 e_1 \cos{(n't - \tilde{\omega}_1)} \\ a_1\,(M_1 - n't + \tilde{\omega}_1) + 2a_1 e_1 \sin{(n't - \tilde{\omega}_1)} \\ i_1 a_1 \sin{(n't - \Omega_1)} \end{pmatrix} \quad . \tag{90}$$

取本轮 $\boldsymbol{R}$ 圆轨道的轨道半长径为单位长度，则有 $a' = n' = 1$，此时，由式 (86) 与式 (90) 分别给出的 m_1 的均轮运动的差别应该为一阶小量，即 $\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{r}_1 - \bar{\boldsymbol{r}}_1 = O\,(\varepsilon)$，由此解出：

$$\begin{cases} \mu_2\varepsilon^{1/3}\, C_1 = 1 - a_1\ , \quad \mu_2\varepsilon^{1/3}\, C_2 = a_1 e_1\ , \quad \mu_2\varepsilon^{1/3}\, C_3 = -i_1 a_1 \\ t_1 = \tilde{\omega}_1\ , \quad \frac{3}{2}\,(1 - a_1)\, t^* = -\tilde{\omega}_1\ , \quad t_2 = \Omega_1 \end{cases} \quad . \tag{91}$$

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

对 m_2 有类似的关系，这里不再列出。将式 (91) 代回式 (84)，即得到 Hill 坐标在 m_1 轨道根数下的表达式，类似地可得到 m_2 轨道根数表示的 Hill 坐标，这里不再列出，结合 m_1, m_2 的表达式，不难得到：

$$\begin{cases} x = \mu_1 x + \mu_2 x \approx \dfrac{1}{\varepsilon^{1/3}}\left[a_2 - a_1 + a_1 e_1 \cos(t - \tilde{\omega}_1) - a_2 e_2 \cos(t - \tilde{\omega}_2)\right] \\ y = \mu_1 y + \mu_2 y \approx \dfrac{1}{\varepsilon^{1/3}}\left[-\dfrac{3}{2}(a_2 - a_1)(t - t^*) + 2a_2 e_2 \sin(t - \tilde{\omega}_2) - 2a_1 e_1 \sin(t - \tilde{\omega}_1)\right] \\ z = \mu_1 z + \mu_2 z \approx \dfrac{1}{\varepsilon^{1/3}}\left[i_2 \sin(n't - \Omega_2) - i_1 \sin(n't - \Omega_1)\right] \end{cases} , \tag{92}$$

下面我们由 m_1, m_2 的轨道根数定义 m_1, m_2 相对运动的轨道根数。不难验证，由极坐标式的正则变量 $(I,\ \theta)$ 到直角式坐标 $(p = \sqrt{-2I}\sin\theta,\ q = \sqrt{-2I}\cos\theta)$ 是一个正则变换，故从无奇点形式的 Delaunay 变量 (见式 (8)) 可以定义如下正则变换：

$$\left(L_1,\ \lambda_1,\ \tilde{G}_1,\ \tilde{\omega}_1,\ \tilde{H}_1,\ \Omega_1\right) \rightarrow (L_1,\ \lambda_1,\ h_1,\ k_1,\ p_1,\ q_1) \quad , \tag{93}$$

$$\begin{aligned} h_1 &= \sqrt{-2\tilde{G}_1}\sin\tilde{\omega}_1 \approx e_1 \sin\tilde{\omega}_1 \ , \quad k_1 = \sqrt{-2\tilde{G}_1}\cos\tilde{\omega}_1 \approx e_1 \cos\tilde{\omega}_1 \ , \\ p_1 &= \sqrt{-2\tilde{H}_1}\sin\Omega_1 \approx i_1 \sin\Omega_1 \ , \quad q_1 = \sqrt{-2\tilde{H}_1}\cos\Omega_1 \approx i_1 \cos\Omega_1 \ . \end{aligned} \tag{94}$$

类似地，可对 m_2 定义如上变量。由式 (94)，定义 m_1, m_2 相对运动的正则根数如下：

$$h_r = h_2 - h_1\ , \quad k_r = k_2 - k_1\ , \quad p_r = p_2 - p_1\ , \quad q_r = q_2 - q_1\ . \tag{95}$$

不难验证，使用式 (95) 定义的相对运动根数，式 (92) 可简化为：

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\varepsilon^{1/3}}\left[a_r - e_r \cos(t - \tilde{\omega}_r)\right] \\ y = \dfrac{1}{\varepsilon^{1/3}}\left[\lambda_r + 2e_r \sin(t - \tilde{\omega}_r)\right] \\ z = \dfrac{1}{\varepsilon^{1/3}} i_r \sin(t - \Omega_r) \end{cases} , \tag{96}$$

其中，$a_r = a_2 - a_1, \lambda_r = \lambda_2 - \lambda_1$。式 (96) 及其微分式给出了 Hill 坐标及速度矢量$(x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})$ 与相对运动根数 $(a_r,\ \lambda_r,\ h_r,\ k_r,\ p_r,\ q_r)$ 的转换关系，这一几何关系可类比于二体运动中的位置速度与轨道根数的转换关系。由圆型 Hill 方程 (见式 (83)) 不难推导相对运动根数满足如下的微分方程：

$$\begin{cases} \dot{a}_r = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial l_r}\ , & \dot{h}_r = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial k_r}\ , & \dot{p}_r = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial q_r} \\ \dot{l}_r = \dfrac{1}{2}n_r + \dfrac{\partial\Psi}{\partial a_r}\ , & \dot{k}_r = \dfrac{\partial\Psi}{\partial h_r}\ , & \dot{q}_r = \dfrac{\partial\Psi}{\partial p_r} \end{cases} , \tag{97}$$

其中，$l_r = \lambda_r/2$，

$$\begin{aligned} \Psi &= -\varepsilon^{2/3}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2} \\ &= -\left[(a_r - e_r \cos(t - \tilde{\omega}_r))^2 + (\lambda_r + 2e_r \sin(t - \tilde{\omega}_r))^2 + i_r^2 \sin^2(t - \Omega_r)\right]^{-1/2} \ . \end{aligned} \tag{98}$$

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

在相对运动根数下，Hill 方程的运动积分变为：

$$H_r = \varepsilon^{2/3}\, h = \frac{1}{2}\left(e_r^2 + i_r^2 - \frac{3}{4}a_r^2\right) + \varPsi \ . \tag{99}$$

可以看到，式 (97) 表现出与哈密顿系统类似的正则形式 (但需注意系统 (97) 并不是一个哈密顿系统)，故不妨称式 (97) 为圆型 Hill 方程的正则形式。在相对运动根数的基础上，可定义如下的正则变换，将变量重新变为直角型坐标：

$$\begin{pmatrix} h_r,\ k_r \\ p_r,\ q_r \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} J_r = \dfrac{e_r^2}{2},\ \omega_r = \tilde{\omega}_r - \varOmega_r \\ K_r = \dfrac{e_r^2 + i_r^2}{2},\ \varOmega_r \end{pmatrix}, \tag{100}$$

$$\mathrm{d}J_r \wedge \mathrm{d}\omega_r + \mathrm{d}K_r \wedge \mathrm{d}\varOmega_r = \mathrm{d}h_r \wedge \mathrm{d}k_r + \mathrm{d}p_r \wedge \mathrm{d}q_r \ .$$

2.2.4 Namouni 的摄动理论

从 Hill 坐标与相对根数的变换关系 (见式 (96)) 可得，系统的运动可视为自由度 (a_r, λ_r) 的运动与一个周期摆动的复合，其中周期摆动在 xy 平面内的振幅由相对偏心率 e_r 决定，周期对应于系统的平运动时标，z 方向短周期摆动的振幅由相对轨道倾角 i_r 决定；因 λ_r 正是哈密顿系统中的 1/1 共振角，故一个自然的假设是 λ_r 的时标远大于系统平运动 t 的时标，此时若 $a_r \gg e_r$，则系统的运动表现为 (a_r, λ_r) 决定的主导运动和短周期振动的复合，Namouni 的研究正是基于这一自由度的等级式结构。事实上，关于自由度的等级式结构还需说明 e_r, i_r 在 (a_r, λ_r) 的时标下变化十分缓慢 (绝热变化)。在平面圆型 Hill 问题下，Hénon 和 Petit[55]用 Kruskal[59] 的摄动方法证明了式 (82) 的两个参数 (碰撞参数和约化偏心率) 在共轨运动的时间尺度下是绝热不变量，而碰撞参数对应 $t \to \infty$ 时 a_r 的值，约化偏心率正是 e_r；而关于 i_r 的绝热变化尚无分析上的证明，Namouni 通过数值积分计算发现，对于系统 (97) 的规则运动，关于 i_r 的假设是合理的。

根据以上分析，可以对 Hill 方程的正则形式在一个平运动周期 (即 $(0, 2\pi)$) 内积分平均，进而在平均化系统中将 (e_r, i_r, ω_r, $\varOmega_r$) “冻结”，此时平均化系统退化为自由度可积系统，其轨迹由平均化的运动积分给出：

$$\langle H_r \rangle = K_r - \frac{3}{8}a_r^2 + \langle \varPsi \rangle \ , \tag{101}$$

$$\langle \varPsi \rangle = -\frac{1}{2\pi e_r}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{a_r}{e_r} - \cos u\right)^2 + 4\left(\frac{l_r}{e_r} + \sin u\right)^2 + \left(\frac{2K_r}{e_r^2} - 1\right)\sin^2(u + \omega_r)\right]^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}u \ , \tag{102}$$

其中，$u = t - \tilde{\omega}_r$。因 $\langle \varPsi \rangle$ 仅显含 ω_r，由式 (101) 可知，K_r 是平均化系统的一个运动积分。当 $l_r \to \infty$ 时 (即 m_1, m_2 的相互距离与质心距 R 在同一量级时)，$\langle \varPsi \rangle \to 0$，此时碰撞参数 a_0 可定义为：

$$a_0^2 = \frac{8}{3}(K_r - H_r) \ . \tag{103}$$

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

由式 (101) 可知，系统主导运动的轨迹满足如下方程：

$$a_r^2\left(l_r\right)=a_0^2-\frac{8}{3e_r}S\left(\frac{a_r}{e_r},\ \frac{l_r}{e_r},\ \left(\frac{2K_r}{e_r^2}-1\right),\ \omega_r\right)\ ,$$
$$S\left(\bar{a},\ \bar{l},\ \bar{K},\ \omega_r\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(\bar{a}-\cos u\right)^2+4\left(\bar{l}+\sin u\right)^2+\left(\bar{K}-1\right)\sin^2\left(u+\omega_r\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u\ . \tag{104}$$

注意到方程左端和右端均显含 a_r，Namouni 进而考虑 $a_r=0$ 时共振角 l_r 的取值 l_0，则有：

$$\frac{3}{8}a_0^2e_r=S\left(0,\ \frac{l_0}{e_r},\ \frac{2K_r}{e_r^2},\ \omega_r\right)\quad . \tag{105}$$

因 $a_r^2\left(l_r\right)\geqslant 0$，故在 $a_r\approx 0$ 时，l_r 的取值必须使得

$$S\left(0,\ \frac{l_r}{e_r},\ \frac{2K_r}{e_r^2},\ \omega_r\right)<S\left(0,\ \frac{l_0}{e_r},\ \frac{2K_r}{e_r^2},\ \omega_r\right)\quad . \tag{106}$$

Namouni 定义的函数 S 很好地描述了平面及空间情形下系统 m_1, m_2 相对运动的可能类型，这一方法可与哈密顿系统的一自由度“冻结”相图 (见图 3) 进行比较。为研究系统的长期演化，Namouni 进一步对正则形式的 Hill 方程积分平均，利用平均化的摄动方程研究了不同共振态下轨道进动的频率及长期共振等性质，其思想与哈密顿系统中的平均化方法没有本质上差异，故不再叙述。

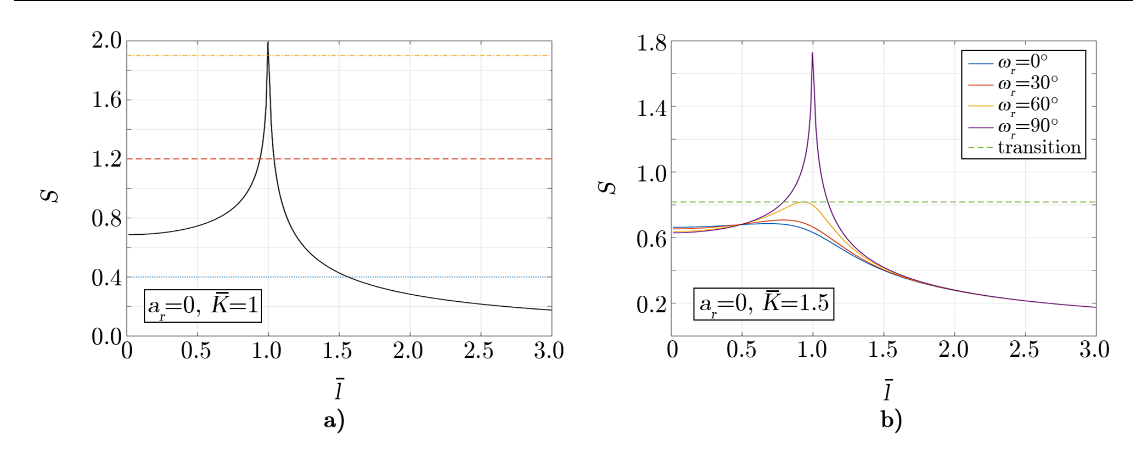
由式 (106) 即可确定 l_r 的运动“趋势”，图 5 给出了两组不同参数下函数 S 的取值 (S 关于 $\bar{l}$ 是偶函数，故只画出 $\bar{l}>0$ 情形)。图 5a) 为平面情形 $i_r=0$，此时按定义 $\bar{K}=1$，$\bar{l}=1$ 是函数 S 的奇点，当 $\bar{l}_0$ 取值在图中蓝色虚线与实线的交点时，则按以上讨论有 $\bar{l}>\bar{l}_0$ 或 $\bar{l}<-\bar{l}_0$，故这一区域对应马蹄型轨道；类似地，红色曲线与实线右支的交点也对应着马蹄型轨道，而当 $\bar{l}_0$ 取在红色虚线与实线左支的交点处时，由以上讨论有 $-\bar{l}_0<\bar{l}<\bar{l}_0$，则这一区域对应着有界运动，从运动轨迹上看可类比于拟卫星轨道；黄色虚线代表碰撞参数 a_0 的较大取值，此时共振角 λ_r 没有进入共振，故称之为穿越轨道。图 5b) 为空间情形 $\bar{K}=1.5$，按定义 $e_r<i_r$，不同颜色的实线对应参数 ω_r 的取值，可以看到，相对于图 a)，绿色虚线标出了一种新的运动类型，当 $\bar{l}_0$ 取值为绿色虚线与黄色实线的交点处时，$\bar{l}$ 既可能向大于 $\bar{l}_0$ 方向运动，也可能往相反方向演化，当考虑 e_r, i_r 的长期演化时，轨道可能从有界轨道跃迁为马蹄型轨道 (反之亦然)，Namouni 将这一种空间情形下的轨道类型称为跃迁轨道。

2.3 数值计算

对完整系统运动方程进行数值积分是研究限制性或行星三体问题最直接、也是最精确的方法。为减小数值计算负担，基于平均化的方法，可对原系统构建一个保留长期动力学演化的映射模型[60, 61]，对哈密顿系统构造映射模型的标准方法可参考 Hadjidemetriou 的工作[62]。将轨道数值积分与一些数值方法相结合，可对系统相空间结构作精确的探索，其中常用的数值方法有寻找和延拓周期轨道、庞加莱截面、稳定指标计算等。类似于平衡点在平均化系统中的重要性，周期轨道在系统全局的动力学结构中扮演着“骨架”的角色[63]，周期轨道的分叉、附近的稳定及不稳定流形决定了相空间局部及全局的性质。因此，数值延

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊



注：a) 平面情形，其中蓝色虚线处在马蹄型轨道区域，红色虚线处在马蹄型轨道或有界轨道，黄色虚线对应穿越轨道；b) $e_r < i_r$ 情形，绿色虚线对应一条可能的跃迁轨道。

图 5　不同参数下 $S\,(a_r,\,\bar{l},\,\bar{K},\,\omega_r)$ 的图像

拓周期轨道是研究系统相空间结构的常用手段[64–68]。庞加莱截面[7, 57, 69]将 N 维的相空间和 $N-2$ 维相空间联系起来，故可直观地从低维空间的几何上“观察”系统的动力学结构。同时，相空间不同区域的稳定性可以通过稳定性指标来确定[8, 70–72]，例如 Lyapunov 指数[73]、MEGNO 指标[74]、本征频率的漂移 (NAFF[75]) 等。

3　动力学简介

Brown[76]在 1911 年指出：在平面限制性三体问题中，当质量参数 μ 足够小时，系统存在这样一族轨道，该族轨道起始于围绕点 L_4 的无穷小振动 (即点 L_4 的长周期轨道族)，沿着以中心天体 m_0 为圆心，半径为 1 的圆扩张，经过点 L_3 处的同宿轨道后演化为马蹄型轨道，最终终结于点 L_1 和点 L_2。为了说明蝌蚪型轨道会经过点L_3 的同宿轨道 (即沿时间正向或负向均趋于点 L_3) 而演化为马蹄型轨道，Brown[76]首先给出了共轨运动极坐标的一阶解，基于该解Brown发现日木系中共轨运动的轨迹可以由零速度曲线很好地近似，而零速度曲线显示在点 L_3 处绕转 L_4, L_5 的蝌蚪型轨迹演化为绕转 L_3, L_4, L_5 的马蹄型轨道，Brown 进一步计算了点 L_3 附近的线性化流形，并发现 L_3 附近的线性双曲流形正好对应了在 L_3 附近的蝌蚪型及马蹄型轨迹，基于该一阶近似结果，Brown 猜测完整的限制性问题中有相同的结论。

在 Brown 之后，许多研究从数值和分析上证明了马蹄型轨道族的存在性[39, 64, 65]。然而，Brown 的关于点 L_4 长周期轨道族经过点 L_3 的同宿轨道演化为马蹄型轨道的猜想先后被 Deprit 和 Henrard[77, 78]的数值结果和 Garfinkel 的理论分析[79]否定。Henrard[78]通过数值计算发现：日木系限制性三体问题的点 L_3 的稳定和不稳定流形并不相交，即 Brown 猜测的点 L_3 处的同宿轨道对于日地系并不存在。根据已有的数值结果[77]，Henrard 猜测：日木系中

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

长周期轨道通过一族周期轨道与绕转 13 圈的短周期轨道 (记这条轨道为 13 分叉轨道) 相连，而这条 13 分叉短周期轨道又通过一族周期轨道与 14 分叉短周期轨道相连，如此继续，即 k 分叉短周期轨道与 $(k+1)$ 分叉短周期轨道相连 ($k \geqslant 13$)。因此长周期轨道族从三角平动点开始，依次经过 13 分叉、14 分叉、15 分叉等短周期轨道。由于短周期轨道族最终终结于一条绕转 L_3 的周期轨道，因此长周期轨道最终终结于一条绕转无穷圈的短周期轨道 (可认为是绕转点 L_3 的一条同宿轨道，该同宿轨道渐近于一条绕转 L_3 的周期轨道)。Garfinkel[78] 通过 $1:1$ 共振极坐标的二阶解验证了 Henrard 的猜想，由此从分析上否定了 Brown 猜想。

人们在太阳系内发现的第一个马蹄型共轨系统是土星的两个卫星 Janus 和 Epimetheus，关于 Janus 和 Epimetheus 的观测历史可见于参考文献 [80]。根据观测数据可知，两个卫星的质量比大约是 $1:3$ 至 $1:5$，Janus 和 Epimetheus 的半径之和大约是它们轨道半径之差的3倍。由于相互引力作用，两个卫星避免了碰撞并分别运行在两条马蹄型轨迹上。限制性模型并不适用于 Janus 和 Epimetheus 组成的共轨系统，由此，Dermott 和 Murray[58, 81] 通过研究两个卫星轨道相互引力对半长径的摄动，构造了一个适用于行星三体问题的共轨模型。Yoder 等人[82] 使用定义在第一主天体上的极坐标，对非限制性问题构建了一个 1/1 理想共振模型；并根据该模型指出，Janus 和 Epimetheus 组成的共轨系统目前十分稳定。Spirig 和 Waldvogel[56] 使用 Hill 三体问题模型准确预测了 Janus 和 Epimetheus 的交换轨道，并对系统的稳定性得到相似的结论。

前面提到，Hill 方程可用来研究一类称之为“卫星遭遇”的问题。Hénon 和 Petit[57] 对“卫星遭遇”问题中碰撞参数所决定的单参数轨道族进行了系统的数值研究，关于具体的计算流程可见 2.2.2 节中的相关介绍。这族单参数轨道在初始时刻对应着两个圆轨道，而碰撞参数 h 即为两个卫星的圆轨道的初始轨道半长径之差。当碰撞参数 h 较小时，数值计算发现[57, 58] 相对运动的轨迹是一个几乎对称的马蹄型轨道 (Janus 和 Epimetheus 的交换轨道的稳定性源于系统的h值很小)。同时，假设 h 为小量，从 Hill 方程可简单得到一个 U 形轨迹的代数方程[56, 57]，由该方程可简单解得两个卫星相对距离最小值与初始碰撞参数的关系[58]。根据 Hill 方程的雅可比积分，若两个卫星初始轨道均为圆轨道，则当它们相互作用又远离后，两个卫星的轨道半长径之差一定大于或等于初始碰撞参数；轨道半长径之差增大对应着卫星的相对运动的势能降低，考虑 Hill 方程的雅可比积分守恒，这部分减小的能量转化为轨道偏心率的增大，即相对运动的动能增大。换言之，由碰撞参数单参数决定的两个初始圆轨道的相对运动可分为两种情况：(1) 对称的马蹄型轨道，且相互作用后轨道偏心率为 0；(2) 相互作用后轨道半长径之差增大，且轨道偏心率不为零。事实上，情况 (1) 对应 2.2.4 节中提到的一个结论：当 h 较小时 (记 $h < h_0$)，相对运动的约化偏心率 e_r 是系统的一个绝热不变量。当初始 h 较大时 (记 $h > h_1$)，两个卫星之间的引力始终是个小量，此时可用摄动方法计算两个轨道在交汇前后的微小变化[55, 83]。当 h 在上述 h_0 和 h_1 中间变化时 (即 $h_0 < h < h_1$)，轨道的相对运动表现出十分复杂的演化和似乎难以穷尽的细节。具体而言，当 h 在某个临界值附近时，相对于h 的微小变化，系统的轨迹却表现出不连续的“突变”：两个卫星在相互作用后再次分开的运动方向会发生突变，而这些“突变”源于系统中的不稳定周期轨道。具体地说，h 的某个临界值对应的相对运动轨道恰好处在系统某个周期

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

轨道的不稳定流形上，当 h 在该临界值附近变化时，轨道会从不稳定流形的两侧渐近逼近该周期轨道，进而从不同方向离开，这导致轨迹的运动方向发生了“突变”。系统实际的运动比上述的物理图像更为复杂，当轨道从一个周期轨道的不稳定流形离开后，可能会再次进入另一个周期轨道的不变流形；对于轨道族的演化而言，已有的计算表明 h 在一个有限的区间内的全部临界值似乎是不可数的零测集，且表现出复杂的自相似结构[84]。因为 h 的临界值对应的相对运动处在周期轨道的渐近逼近轨道上，这对应着系统的永久俘获，而由于 h 的临界值是个零测集，故永久俘获实际上几乎不会发生。

下面对共轨运动的长期演化理论做简要介绍。在椭圆型限制性三体问题下，érdi[85, 86]对三角平动点附近的运动构造了一套分析解，基于该解 érdi[87, 88]给出了三角平动点附近运动的轨道根数的摄动解。Morais[22, 51]用经典方法对摄动函数展开到二阶 (见 2.1.2 节)，并沿着 1/1 共振的可积近似的运动轨迹对哈密顿函数平均化，进而得到 1/1 共振的长期演化方程。截断至小参数的二阶量时，平均化运动方程可以显式地解出，该解中的频率仅依赖于一个表征无摄 1/1 共振模型中轨迹振幅的参数，而不依赖于偏心率和轨道倾角，故 Morais 称之为线性长期理论。Morais 进一步研究了中心天体的扁率以及第三体引力的平均化效应，并给出了相应的摄动解，该解包含长期共振对应的小分母。应用该线性长期摄动理论，Morais 计算了土星摄动下木星 Trojan 小行星以及天王星的卫星系统中长期共振的位置，并与数值积分的结果进行了对比。可以看出，Morais 的线性长期摄动理论适用于小偏心率小轨道倾角的运动，同时平均化的有效性要求了 1/1 共振的规则运动 (远离不同共振态之间的边界)，同时 1/1 共振周期要远小于长期演化的特征时标。基于小偏心率 e 及轨道倾角 i 的经典摄动函数展开[5]，Robutel 和 Pousse[6]对行星三体问题的共轨运动提出了一个理想共振模型，与 Yoder 和 Morais 等人模型的主要区别在于该模型具有五个平衡点。Robutel 和 Pousse 进一步研究理想共振模型中不同轨迹的长期演化方程：类似于 Morais 的线性长期理论，截断至 $O(e^2)$ 时该方程是系数为周期函数的线性微分方程组。由于考虑小偏心率和小轨道倾角，长期演化方程此时等价于理想共振模型不同方向上的变分方程。在平衡点处，该方程组可直接解出，在理想共振模型的任一周期轨道上，方程组可根据 Floquet 理论解出。方程组解的频率对应着 1/1 共振轨迹的长期演化频率，由此 Robutel 和 Pousse 计算了 1/1 共振中可能发生的次级共振的位置。特别地，在点 L_4“偏心率方向”的变分方程有一个零特征根和一个非零特征根，零特征根对应着拉格朗日周期轨道，非零特征根对应着所谓的反拉格朗日周期轨道[8]，在点 L_3 有类似的结果。需要指出的是，这些周期轨道是定义在平均化系统中。由 Lyapunov 中心定理，点 L_4 处生发了一族与零特征根的特征方向相切的周期轨道，即拉格朗日周期轨道。但由于另一特征根为零，Lyapunov 中心定理无法保证反拉格朗日轨道族的存在性。Robutel 和 Pousse 进而对点 L_4 附近的运动构造了高阶的 Birkhoff normal form，并证明了从点 L_4 生发了一族反拉格朗日周期轨道。

上面介绍的长期演化理论仅适用于近圆近平面的共轨运动。Namouni[4]在研究中首先指出：在大偏心率或高轨道倾角处存在着与熟知的 1/1 共振轨迹不同的共振态，例如 2.2.4 节中介绍的跃迁 (transition) 轨道等。Namouni 首先在 Hill 三体问题中发现了轨道因长期演化在不同的 1/1 共振态之间迁移的可能性，进而用数值积分方法研究了一些选定轨道的长期

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

演化。在相图上的不同区域，Namouni 确认了与轨道长期演化相关的动力学现象，例如围绕 $\omega_r = 0°$ 或 $180°$ 的 Kozai 共振，并发现这些束缚在长期共振的轨道往往对应某一类跃迁轨道。Namouni 等人[89]指出：可能存在着尚未发现的运行在 1/1 共振跃迁轨道上的近地小行星，这些小行星有可能被地球短暂地俘获在拟卫星轨道上[90]。同时，Namouni 等人指出，不同 1/1 共振态之间的跃迁也为地球防御近地小行星的撞击提供了一种保护机制。通过将摄动函数在非零偏心率和轨道倾角处展开以及数值平均，Nesvorny 等人[3]用哈密顿系统研究了两种情形的共轨运动：平面椭圆型限制性三体问题及空间圆型限制性三体问题，两个问题均为三自由度。通过数值平均 (见 2.1.3 节) 去除哈密顿函数中的快变量，系统降为二自由度；对平均化系统应用绝热摄动理论 (见 2.1.5 节)，系统降为一自由度，对应原系统的长期演化。通过将二自由度平均化系统中的慢变量“冻结”，Nesvorny 等人给出了相空间不同区域的 1/1 共振相图，并发现了不同于平面情形的 1/1 共振态 (例如图 3b))，并指出了在轨道的长期进动下，系统在不同 1/1 共振态之间迁移的可能性；一自由度系统给出的长期演化相图给出了与 Namouni[4] 工作中相近的动力学性质，Nesvorny 等人用数值积分对长期演化相图上的结构进行了验证，并指出在不同共振态间迁移的轨道基本是混沌的。

Barrabés 和 Mikkola[91] 计算了限制性问题中平面和空间中的对称马蹄型周期轨道：周期轨道的迭代与延拓使用了 Gómez 和 Mondelo[92] 给出的一般方法，而周期轨道的初始值由 Llibre 和 Ollé[93] 的方法给出。通过计算，Barrabés 和 Mikkola 研究了平面马蹄型周期轨道族的结构和演化，发现了轨道倾角 $i = 17°$ 的稳定的周期轨道。Barrabés 和 Ollé[66] 系统地研究了平面限制性三体问题中的马蹄型周期轨道族。马蹄型轨道在二体问题极限下 ($\mu \to 0$) 对应着两条开普勒轨道，对称马蹄型周期轨道要求这两条开普勒轨道在转动坐标系下也为对称周期轨道。Barrabés 和 Ollé 导出了这族开普勒轨道的初始条件，并称之为马蹄型轨道的生成族。基于上述的生成族，Barrabés 和 Ollé 通过数值延拓得到了 $\mu > 0$ 且 μ 较小 (不妨设该值为 $\mu = \mu_a$) 的马蹄型周期轨道族，并根据生成族的结构解释了 $\mu = \mu_a$ 时马蹄型周期轨道族的特征。在得到 $\mu = \mu_a$ 处 L_3 点附近的周期轨道族后，一个自然的想法便是以这族轨道为初始值，进一步将周期轨道族延拓至 $\mu = \mu_a + \delta$，其中 δ 充分小使得迭代收敛。然而，Barrabés 和 Ollé 通过计算发现 L_3 点附近的不变流形非常敏感地依赖于 μ 值的微小变化，这使得简单地沿着质量参数 μ 进行延拓变得困难。根据上述特点，为分析 $\forall \mu \in (0, 1/2]$ 系统中点 L_3 附近的 HPO，Barrabés 和 Ollé 根据以下机制系统地研究了点 L_3 的不稳定流形的形状：当点 L_3 的不稳定流形为马蹄型的同宿轨道时 (记此时 $\mu = \mu_{\rm homo}$)，在该同宿轨道的邻域内可找到无穷多个马蹄型周期轨道。通过计算，Barrabés 和 Ollé 发现了两个极限为零的 $\mu_{\rm homo}$ 的无穷序列，而对 $\mu_{\rm homo}$ 值附近的系统的点 L_3 不变流形的计算显示：系统存在双“周期”的马蹄型同宿轨道，即该同宿轨道在一个“周期”内绕转点 L_4 和 L_5 两次。Barrabés 和 Ollé 根据以上机制解释了 $\forall \mu \in (0, 1/2]$ 系统中点 L_3 附近的 HPO 的存在性。当然，系统存在其他机制“生成”马蹄型周期轨道，如 Deprit 和 Henrard[94] 的计算显示，点 L_3 的不稳定周期轨道的不变流形存在马蹄型同宿轨道。Barrabés 和 Ollé 发现：点 L_3 的不稳定流形在某些 μ 值处会十分靠近点 L_1 和 L_2，甚至存在与第二主天体接触的碰撞流形，这表明马蹄型轨道的演化与系统全局的动力学结构密切相关。Hou 和 Liu[95] 通过数值研究

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

指出：对称 HPO 可由围绕点 L_3 的平面 Lyapunov 周期轨道族的 m 分叉轨道得到，即对称 HPO 是连接这些分叉周期轨道的周期轨道族。

Hadjidemetriou 等人[7]指出平面行星三体问题共轨运动中存在两族对称周期轨道 (一族稳定，一族不稳定)，这两族轨道在分析上可由点 L_3 处的变分方程得到[6]。在稳定的周期轨道上，两个行星的轨道偏心率初始时近似满足 $m_1e_1 = m_2e_2$[6, 8]，近点角距相差 180° 且与中心天体共线，初始平经度也相差 180°，这一构型对应着拟卫星轨道[2]。在不稳定的周期轨道上，两个行星的轨道偏心率满足 $e_1 = e_2$，近点角距相差 0° (即在中心天体同一侧) 且与中心天体共线，初始平经度也相差 180°，这一构型对应着 Euler 的共线平动点。Hadjidemetriou 等人[7]用庞加莱截面计算了周期轨道族邻域内的运动。从 2/1 和 3/1 平运动共振的研究中已经知道[96, 97]：在非保守力作用下行星系统可以沿着稳定的周期轨道族缓慢演化。Hadjidemetriou 和 Voyatzis[98]发现：当一个拖曳力作用在 1/1 共振系统中时，系统可沿着上述的稳定周期轨道族缓慢地由行星轨道向卫星轨道迁移，这提供了一个由行星系统产生卫星系统的机制。

2017 年，Wiegert 等人[99, 100] 证实太阳系中存在一颗与木星处于 1/1 逆行共振的小行星 2015 BZ509。从会合坐标系下看，小行星 2015 BZ509 的轨道形状为蚶形，数值计算表明 2015 BZ509 的轨道在百万年尺度上是稳定的。对于逆行 1/1 共振的研究开始于 2015 BZ509 的发现之前。Morais 和 Namouni[69]对 1/1 逆行共振建立了分析和半分析模型，并发现了几种不同的共振态。Morais 和 Namouni[72]通过数值计算轨道稳定性指标发现，在圆型限制性问题下存在稳定的空间 1/1 逆行共振轨道。Huang 等人[101]研究了 1/1 逆行共振中的 Kozai 共振。在空间圆型限制性问题下，Sidorenko[102]用哈密顿系统构造了 1/1 逆行共振的长期摄动理论。

4 总结与展望

本文回顾了限制性及行星三体问题中的共轨运动相关的模型、方法及动力学研究。第 1 章在物理直观上解释了共轨运动及 1/1 平运动共振的含义，介绍了限制性及行星三体问题中典型的共轨运动类型，并对太阳系中的自然共轨系统、太阳系外共轨系统的探测现状做了简要介绍。第 2 章主要介绍了处理共轨运动的两种常用方法：哈密顿系统以及 Hill 三体问题。哈密顿系统可以研究 1/1 共振全局或局部的动力学性质，2.1.1 节给出了限制性及行星三体问题的哈密顿函数；2.1.2 节介绍了适用于 1/1 共振的摄动函数展开方法，并给出了经典展开方法截断至二阶量的结果；2.1.3 节介绍了哈密顿系统降低自由度的两种方法：正规化和平均化，并给出相关算例；2.1.4 节以行星三体问题为例介绍了 1/1 共振的理想共振模型 (又称为可积近似)；2.1.5 节首先介绍了经典的 3/1 共振长期摄动理论 (主要是 Wisdom 及 Henrard 等人的工作)，进而讨论了 1/1 共振的长期摄动理论。Hill 的三体问题是处理共轨运动的另一有效途径，2.2.1 节给出了经典的 Hill 方程，并推导了适用行星三体问题的更一般的椭圆型 Hill 方程；2.2.2 节给出了圆型 Hill 方程的无摄解、U 型轨迹分析解，并介绍

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

了连接 Hill 方程外部近似与内部近似的四参数的渐进逼近解；2.2.3 节推导了圆型 Hill 方程的正则形式，为Hill方程的平均化做了准备；基于圆型 Hill 方程的正则形式，2.2.4 节介绍了 Namouni 处理共轨运动的摄动方法。最后，2.3 节简单介绍了基于轨道数值积分的常用的数值方法：周期轨道延拓、庞加莱截面、稳定性指标的计算等。第 3 章回顾了共轨运动相关的动力学研究，包括蝌蚪型轨道演化的 Brown 猜想，行星三体问题的 1/1 理想共振模型，“卫星遭遇”问题中的数值计算，小偏心率及轨道倾角下的共轨运动的线性长期理论，大偏心率和大轨道倾角下新的 1/1 共振态以及不同共振态之间的跃迁，限制性及行星三体问题中周期轨道族和不变流形的计算等。

第 2 章提到，哈密顿系统仍有一些技术性问题尚未解决，其中之一是摄动函数展开在靠近碰撞奇点时的收敛性问题。Pousse 等人[2]指出，平均化方法在拟卫星区域的有效性受到限制的原因有两个：一是限制性三体问题中与拟卫星轨道对应的f族周期轨道[1]在第二主天体附近的频率并不存在短周期与长周期之分，故平均化方法从根本上不适用；第二个原因是技术性的，即摄动函数展开在靠近碰撞奇点处的收敛问题，而这一收敛性问题可能通过新的展开方法得到改善。哈密顿系统的另一技术性问题是摄动函数展开受限于小偏心率及小轨道倾角，Brumberg 等人[103]提出了用椭圆函数描述开普勒轨道的方法，这为非零偏心率处摄动函数展开提供了一个分析途径。2.1.4 节提到，Garfinkel 通过他的广义理想共振模型对限制性问题的共轨运动得到了二阶解，用相同的方法可以尝试处理行星三体问题。Henon 和 Petit[55] 以及 Spirig 和 Waldvogel[56]给出了平面圆型 Hill 方程的一族四参数渐近逼近解，可以考虑将该解推广至空间情形下或椭圆型 Hill 方程。从数值计算方法出发，可进一步考虑平面圆型 Hill 方程下初始轨道为椭圆轨道的“卫星遭遇”问题[55]，以及初始轨道空间 Z 方向分量不为零的情形。在平面圆型限制性问题中，由平均化分析理论得到的运动性态 (平衡点、周期轨道) 与完整系统中数值方法得到的周期轨道族、拟周期轨道之间的联系是清楚的[2]。类似地，可以考虑大偏心率或高倾角处以及非限制性问题中，周期轨道族以及拟周期轨道与分析理论之间的联系。

附录 A　摄动函数展开：直接项与间接项

限制性三体问题及行星三体问题摄动函数间接项截断至偏心率及轨道倾角的二阶项的

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

表达式分别为：

$$\frac{r_1}{r_2^2}\cos\psi = \frac{a_1}{a_2^2}\times \left\{\begin{array}{l} \cos(\lambda_1-\lambda_2)+e_1\left[\frac{1}{2}\cos(-\tilde{g}_1+2\lambda_1-\lambda_2)-\frac{3}{2}\cos(\lambda_2-\tilde{g}_1)\right]+ \\ 2e_2\cos(\tilde{g}_2+\lambda_1-2\lambda_2)+e_2e_1\left[\cos(-\tilde{g}_1+\tilde{g}_2+2\lambda_1-2\lambda_2)-3\cos(-\tilde{g}_1-\tilde{g}_2+2\lambda_2)\right]+ \\ e_1^2\left[\frac{3}{8}\cos(2(\lambda_1-\tilde{g}_1)+\lambda_1-\lambda_2)+\frac{1}{8}\cos(-2(\lambda_1-\tilde{g}_1)+\lambda_1-\lambda_2)-\frac{1}{2}\cos(\lambda_1-\lambda_2)\right]+ \\ e_2^2\left[\frac{1}{8}\cos(2(\lambda_2-\tilde{g}_2)+\lambda_1-\lambda_2)+\frac{27}{8}\cos(-2(\lambda_2-\tilde{g}_2)+\lambda_1-\lambda_2)-\frac{1}{2}\cos(\lambda_1-\lambda_2)\right]+ \\ s_1^2\left[\cos(2h_1-\lambda_1-\lambda_2)-\cos(\lambda_1-\lambda_2)\right]+s_2^2\left[\cos(2h_2-\lambda_1-\lambda_2)-\cos(\lambda_1-\lambda_2)\right]+ \\ s_1s_2c_1c_2\left[-2\cos(h_1+h_2-\lambda_1-\lambda_2)+2\cos(h_1-h_2-\lambda_1+\lambda_2)\right] \end{array}\right\}, \tag{A.1}$$

$$\frac{\tilde{r}_1\cdot\tilde{r}_2}{m_0} = Gm_1m_2\frac{m_0}{\sqrt{(m_0+m_1)(m_0+m_2)}}\frac{1}{\sqrt{a_1a_2}}\times \left\{\begin{array}{l} \cos(\lambda_1-\lambda_2)+ \\ e_2\cos(\tilde{g}_2+\lambda_1-2\lambda_2)+e_1\cos(-\tilde{g}_1+2\lambda_1-\lambda_2)+e_2e_1\cos(-\tilde{g}_1+\tilde{g}_2+2\lambda_1-2\lambda_2)+ \\ e_1^2\left[\frac{9}{8}\cos(-2\tilde{g}_1+3\lambda_1-\lambda_2)-\frac{1}{8}\cos(-2\tilde{g}_1+\lambda_1+\lambda_2)-\frac{1}{2}\cos(\lambda_1-\lambda_2)\right]+ \\ e_2^2\left[\frac{9}{8}\cos(2\tilde{g}_2+\lambda_1-3\lambda_2)-\frac{1}{8}\cos(-2\tilde{g}_2+\lambda_1+\lambda_2)-\frac{1}{2}\cos(\lambda_1-\lambda_2)\right]+ \\ 2s_1s_2c_1c_2\left[\cos(h_1+h_2-\lambda_1-\lambda_2)+\cos(h_1-h_2-\lambda_1+\lambda_2)\right]+ \\ s_1^2\left[-\cos(2h_1-\lambda_1-\lambda_2)-\cos(\lambda_1-\lambda_2)\right]+s_2^2\left[-\cos(2h_2-\lambda_1-\lambda_2)-\cos(\lambda_1-\lambda_2)\right] \end{array}\right\}, \tag{A.2}$$

其中，$s_1=\sin\frac{i_1}{2}$，$s_2=\sin\frac{i_2}{2}$，$c_1=\cos\frac{i_1}{2}$，$c_2=\cos\frac{i_2}{2}$。

限制性或行星三体问题中直接项的主要部分 $1/\varDelta_{12}$ 截断至偏心率及轨道倾角的二阶项的表达式为

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta}=I_0+e_1I_1\left[a_1^2\cos(\tilde{g}_1-\lambda_1)-\frac{3}{2}a_2a_1\cos(\tilde{g}_1-\lambda_2)+\frac{1}{2}a_2a_1\cos(\tilde{g}_1-2\lambda_1+\lambda_2)\right]+\\
&e_2I_1\left[a_2^2\cos(\lambda_2-\tilde{g}_2)-\frac{3}{2}a_1a_2\cos(\lambda_1-\tilde{g}_2)+\frac{1}{2}a_1a_2\cos(\tilde{g}_2+\lambda_1-2\lambda_2)\right]+\\
&e_1^2\left\{\begin{array}{l}
I_1\left[\begin{array}{l}-\dfrac{3a_1^2}{4}-\dfrac{1}{2}a_2a_1\cos(\lambda_1-\lambda_2)+\dfrac{1}{4}a_1^2\cos(2\tilde{g}_1-2\lambda_1)+\\ \dfrac{1}{8}a_2a_1\cos(2\tilde{g}_1-\lambda_1-\lambda_2)+\dfrac{3}{8}a_2a_1\cos(2\tilde{g}_1-3\lambda_1+\lambda_2)\end{array}\right]+\\
I_2\left[\begin{array}{l}\dfrac{3a_1^4}{4}+\dfrac{15}{8}a_2^2a_1^2-\dfrac{3}{2}a_2a_1^3\cos(\lambda_1-\lambda_2)-\dfrac{9}{8}a_2^2a_1^2\cos(2\lambda_1-2\lambda_2)-\\ \dfrac{9}{4}a_2a_1^3\cos(2\tilde{g}_1-\lambda_1-\lambda_2)+\dfrac{3}{4}a_2a_1^3\cos(2\tilde{g}_1-3\lambda_1+\lambda_2)-\dfrac{9}{8}a_2^2a_1^2\cos(2\tilde{g}_1-2\lambda_1)+\\ \dfrac{27}{16}a_2^2a_1^2\cos(2\tilde{g}_1-2\lambda_2)+\dfrac{3}{16}a_2^2a_1^2\cos(2\tilde{g}_1-4\lambda_1+2\lambda_2)+\dfrac{3}{4}a_1^4\cos(2\tilde{g}_1-2\lambda_1)\end{array}\right]
\end{array}\right\}+\\
&e_2^2\left\{\begin{array}{l}
I_1\left[\begin{array}{l}-\dfrac{3a_2^2}{4}-\dfrac{1}{2}a_1a_2\cos(\lambda_1-\lambda_2)+\dfrac{1}{4}a_2^2\cos(2\lambda_2-2\tilde{g}_2)+\\ \dfrac{1}{8}a_1a_2\cos(-2\tilde{g}_2+\lambda_1+\lambda_2)+\dfrac{3}{8}a_1a_2\cos(2\tilde{g}_2+\lambda_1-3\lambda_2)\end{array}\right]+\\
I_2\left[\begin{array}{l}\dfrac{3a_2^4}{4}+\dfrac{15}{8}a_1^2a_2^2-\dfrac{3}{2}a_1a_2^3\cos(\lambda_1-\lambda_2)-\dfrac{9}{8}a_1^2a_2^2\cos(2\lambda_1-2\lambda_2)+\\ \dfrac{3}{4}a_2^4\cos(2\lambda_2-2\tilde{g}_2)+\dfrac{27}{16}a_1^2a_2^2\cos(2\lambda_1-2\tilde{g}_2)+\dfrac{3}{16}a_1^2a_2^2\cos(2\tilde{g}_2+2\lambda_1-4\lambda_2)-\\ \dfrac{9}{4}a_1a_2^3\cos(-2\tilde{g}_2+\lambda_1+\lambda_2)-\dfrac{9}{8}a_1^2a_2^2\cos(2\lambda_2-2\tilde{g}_2)+\dfrac{3}{4}a_1a_2^3\cos(2\tilde{g}_2+\lambda_1-3\lambda_2)\end{array}\right]
\end{array}\right\}+\\
&e_1e_2\left\{\begin{array}{l}
I_1\left[\begin{array}{l}-\dfrac{3}{4}a_1a_2\cos(-\tilde{g}_1-\tilde{g}_2+2\lambda_1)-\dfrac{3}{4}a_1a_2\cos(-\tilde{g}_1-\tilde{g}_2+2\lambda_2)+\\ \dfrac{1}{4}a_1a_2\cos(-\tilde{g}_1+\tilde{g}_2+2\lambda_1-2\lambda_2)+\dfrac{9}{4}a_1a_2\cos(\tilde{g}_1-\tilde{g}_2)\end{array}\right]+\\
I_2\left[\begin{array}{l}-\dfrac{9}{4}a_2a_1^3\cos(-\tilde{g}_1-\tilde{g}_2+2\lambda_1)-\dfrac{9}{4}a_2^3a_1\cos(-\tilde{g}_1-\tilde{g}_2+2\lambda_2)-\\ \dfrac{9}{8}a_2^2a_1^2\cos(-\tilde{g}_1-\tilde{g}_2+3\lambda_1-\lambda_2)+\dfrac{21}{4}a_2^2a_1^2\cos(-\tilde{g}_1-\tilde{g}_2+\lambda_1+\lambda_2)+\\ \dfrac{27}{8}a_2^2a_1^2\cos(\tilde{g}_1-\tilde{g}_2+\lambda_1-\lambda_2)-\dfrac{3}{4}a_2^2a_1^2\cos(-\tilde{g}_1+\tilde{g}_2+\lambda_1-\lambda_2)+\\ \dfrac{3}{8}a_2^2a_1^2\cos(-\tilde{g}_1+\tilde{g}_2+3\lambda_1-3\lambda_2)-\dfrac{9}{8}a_2^2a_1^2\cos(\tilde{g}_1+\tilde{g}_2+\lambda_1-3\lambda_2)+\\ \dfrac{3}{4}a_2^3a_1\cos(-\tilde{g}_1-\tilde{g}_2+2\lambda_1)+\dfrac{3}{4}a_2a_1^3\cos(-\tilde{g}_1-\tilde{g}_2+2\lambda_2)+\\ \dfrac{3}{4}a_2^3a_1\cos(-\tilde{g}_1+\tilde{g}_2+2\lambda_1-2\lambda_2)-\dfrac{9}{4}a_2a_1^3\cos(\tilde{g}_1-\tilde{g}_2)+\\ \dfrac{3}{4}a_2a_1^3\cos(-\tilde{g}_1+\tilde{g}_2+2\lambda_1-2\lambda_2)-\dfrac{9}{4}a_2^3a_1\cos(\tilde{g}_1-\tilde{g}_2)\end{array}\right]
\end{array}\right\}+\\
&a_1a_2I_1\left\{\begin{array}{l}s_1^2\left[\cos(2h_1-\lambda_1-\lambda_2)-\cos(\lambda_1-\lambda_2)\right]+s_2^2\left[\cos(2h_2-\lambda_1-\lambda_2)-\cos(\lambda_1-\lambda_2)\right]+\\ 2s_1s_2c_1c_2\left[\cos(h_1-h_2-\lambda_1+\lambda_2)-\cos(h_1+h_2-\lambda_1-\lambda_2)\right]\end{array}\right\},
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

其中，

$$I_n = \left(a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos\left(\lambda_1 - \lambda_2\right)\right)^{-\frac{2n-1}{2}} \quad .$$

参考文献：

[1] Hénon M, Guyot M. In: Giacaglia G E O, ed. Periodic Orbits Stability and Resonances. Dordrecht: Springer, 1970: 349

[2] Pousse A, Robutel P, Vienne A. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2017, 128(4): 383

[3] Nesvorný D, Thomas F, Ferraz-Mello S, et al. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2002, 82(4): 323

[4] Namouni F. Icarus, 1999, 137(2): 293

[5] Laskar J, Robutel P. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 1995, 62(3): 193

[6] Robutel P, Pousse A. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2013, 117(1): 17

[7] Hadjidemetriou J D, Psychoyos D, Voyatzis G. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2009, 104(1-2): 23

[8] Giuppone C A, Beaugé C, Michtchenko T A, et al. MNRAS, 2010, 407(1): 390

[9] Greenstreet S, Gladman B, Ngo H. AJ, 2020, 160(3): 144

[10] Laughlin G, Chambers J E. AJ, 2002, 124(1): 592

[11] Giuppone C A, Benítez-Llambay P, Beaugé C. MNRAS, 2012, 421(1): 356

[12] Goździewski K, Konacki M. ApJ, 2006, 647(1): 573

[13] Rein H. MNRAS, 2015, 448: L58

[14] Lissauer J J, Dawson R I, Tremaine S. Nature, 2014, 513(7518): 336

[15] Perryman M. The Exoplanet Handbook. Cambridge: Cambridge University Press, 2018: 76

[16] Leleu A, Coleman G A L, Ataiee S. A&A, 2019, 631: A6

[17] Ferraz-Mello S. Canonical Perturbation Theories - Degenerate Systems and Resonance. Vol. 345. New York: Springer, 2007: 174

[18] Celletti A, Chierchia L. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2006, 95(1-4): 117

[19] Kaula W M. AJ, 1962, 67: 300

[20] Harrington R S. AJ, 1968, 73: 190

[21] Brouwer D, Clemence G M. Methods of Celestial Mechanics. New York: Academic Press Inc, 1961: 60

[22] Morais M H M. A&A, 1999, 350: 318

[23] 刘林. 卫星轨道力学算法. 南京: 南京大学出版社, 2019

[24] Kaula W M. Geophysical Journal, 1961, 5(2): 104

[25] Robutel P, Niederman L, Pousse A. arXiv e-prints, 2015: arXiv:1506.02870

[26] Giuppone C A, Leiva A M. MNRAS, 2016, 460(1): 966

[27] Ferraz-Mello S. A&A, 1987, 183(2): 397

[28] Ferraz-Mello S, Sato M. A&A, 1989, 225: 541

[29] Roig F, Simula A, Ferraz-Mello S, et al. A&A, 1998, 329: 339

[30] Páez R I, Locatelli U, Efthymiopoulos C. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2016, 126(4): 519

[31] Jorba À, Masdemont J. Physica D Nonlinear Phenomena, 1999, 132(1-2): 189

[32] Tan P, Hou X Y, Liao X H. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2021, 133(7): 31

[33] Arnold V I. Mathematical methods of classical mechanics. New York: Springer, 1978: 292

[34] Deprit A. Celestial Mechanics, 1969, 1(1): 12

[35] Garfinkel B. AJ, 1966, 71: 657

[36] Cors J M, Palacian J F, Yanguas P. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 2019, 18(1): 334

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

[37] Niederman L, Pousse A, Robutel P. Communications in Mathematical Physics, 2020, 377(1): 551
[38] Garfinkel B. Celestial Mechanics, 1976, 13(2): 229
[39] Garfinkel B. AJ, 1977, 82: 368
[40] Garfinkel B. Celestial Mechanics, 1978, 18(3): 259
[41] Wisdom J. Icarus, 1985, 63(2): 272
[42] Henrard J. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 1990, 49(1): 43
[43] Murray C D, Dermott S F. Solar System Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1999: 462
[44] Lichtenberg A J, Lieberman M A. Regular and stochastic motion. New York: Springer, 1983: 88
[45] Henrard J, Lemaitre A. Celestial Mechanics, 1986, 39(3): 213
[46] Henrard J, Caranicolas N D. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 1990, 47(2): 99
[47] Beaugé C, Roig F. Icarus, 2001, 153(2): 391
[48] Kozai Y. Celestial Mechanics, 1985, 36(1): 47
[49] Giacaglia G E O, Nacozy P E. In: Giacaglia G E O, ed. Periodic Orbits Stability and Resonances. Dordrecht: Springer, 1970: 96
[50] Li M, Huang Y K, Gong S P. Research in Astronomy and Astrophysics (RAA), 2021, 21(2): 25
[51] Morais M H M. A&A, 2001, 369: 677
[52] Beauge C, Ferraz-Mello S. Icarus, 1994, 110(2): 239
[53] Lhotka C, Celletti A. Icarus, 2015, 250: 249
[54] Sicardy B, Dubois V. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2003, 86(4): 321
[55] Henon M, Petit J M. Celestial Mechanics, 1986, 38(1): 67
[56] Spirig F, Waldvogel J. In: Szebehely V G, ed. Stability of the Solar System and its Minor Natural and Artificial Bodies. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company, 1985: 53
[57] Petit J M, Henon M. Icarus, 1986, 66(3): 536
[58] Dermott S F, Murray C D. Icarus, 1981, 48(1): 1
[59] Kruskal M. Journal of Mathematical Physics, 1962, 3(4): 806
[60] Wisdom J. AJ, 1982, 87: 577
[61] Sandor Z, Morais M H M. In: Pretka-Ziomek H, Wnuk E, Seidelmann P K, et al, eds. Dynamics of Natural and Artificial Celestial Bodies. Dordrecht: Springer, 2002，81: 263
[62] Hadjidemetriou J D. Predictability, Stability, and Chaos in N-Body Dynamical Systems. New York: Plenum Press, 1991: 157
[63] Henon M. Generating Families in the Restricted Three-Body Problem. Berlin, Heidelberg: Springer, 1997: 1
[64] Rabe E. AJ, 1961, 66: 500
[65] Taylor D B. A&A, 1981, 103(2): 288
[66] Barrabés E, Ollé M. Nonlinearity, 2006, 19(9): 2065
[67] Kreisman B B. Cosmic Research, 2016, 54(6): 475
[68] Morais M H M, Namouni F. MNRAS, 2019, 490(3): 3799
[69] Morais M H M, Namouni F. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2013, 117(4): 405
[70] Zhao Z Y, Liu L. Icarus, 1992, 100(1): 136
[71] Funk B, Dvorak R, Schwarz R. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2013, 117: 1
[72] Morais M H M, Namouni F. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2016, 125(1): 91
[73] Skokos C. The Lyapunov Characteristic Exponents and Their Computation. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010: 63
[74] Cincotta P M, Simó C. A&AS, 2000, 147: 205
[75] Laskar J. arXiv Mathematics e-prints, 2003: math/0305364
[76] Brown E W. MNRAS, 1911, 71: 438
[77] Deprit A, Henrard J. In: Giacaglia G E O, ed. Periodic Orbits Stability and Resonances. Dordrecht: Springer, 1970: 1
[78] Henrard J. Celestial Mechanics, 1983, 31(2): 115

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

[79] Garfinkel B. Celestial Mechanics, 1985, 36(1): 19
[80] Aksnes K. In: Szebehely V G, ed. Stability of the Solar System and its Minor Natural and Artificial Bodies. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company, 1985: 3
[81] Dermott S F, Murray C D. Icarus, 1981, 48(1): 12
[82] Yoder C F, Colombo G, Synnott S P, et al. Icarus, 1983, 53(3): 431
[83] Goldreich P, Tremaine S. ApJ, 1980, 241: 425
[84] Petit J M, Hénon M. On a Cantor structure in a satellite scattering problem. Vol. 355. Berlin, Heidelberg: Springer, 1990: 225
[85] Erdi B. Celestial Mechanics, 1977, 15(3): 367
[86] Erdi B. Celestial Mechanics, 1978, 18(2): 141
[87] Erdi B. Celestial Mechanics, 1979, 20(1): 59
[88] Erdi B. Celestial Mechanics, 1981, 24(4): 377
[89] Namouni F, Christou A A, Murray C D. Phys. Rev. Lett., 1999, 83(13): 2506
[90] Mikkola S, Innanen K, Wiegert P, et al. MNRAS, 2006, 369(1): 15
[91] Barrabés E, Mikkola S. A&A, 2005, 432(3): 1115
[92] Gómez G, Mondelo J M. Physica D Nonlinear Phenomena, 2001, 157(4): 283
[93] Llibre J, Ollé M. A&A, 2001, 378: 1087
[94] Deprit A, Henrard J. AJ, 1969, 74: 308
[95] Hou X Y, Liu L. AJ, 2008, 136(1): 67
[96] Ferraz-Mello S, Beaugé C, Michtchenko T A. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2003, 87(1): 99
[97] Beaugé C, Michtchenko T A, Ferraz-Mello S. MNRAS, 2006, 365(4): 1160
[98] Hadjidemetriou J D, Voyatzis G. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2011, 111(1-2): 179
[99] Wiegert P, Connors M, Veillet C. Nature, 2017, 543(7647): 687
[100] Morais H, Namouni F. Nature, 2017, 543(7647): 635
[101] Huang Y, Li M, Li J, et al. MNRAS, 2018, 481(4): 5401
[102] Sidorenko V V. AJ, 2020, 160(6): 257
[103] Brumberg E, Brumberg V A, Konrad T, et al. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 1995, 61(4): 369

A Review on Co-orbital Motion in Restricted and Planetary Three-body Problem

TAN Pan[1], SHEN Xin-he[2], HOU Xi-yun[1], LIAO Xin-hao[2]

(1. School of Astronomy and Space Science, Nanjing Universtity, Nanjing 210023, China; 2. Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030, China)

Abstract: The 1/1 mean motion resonance may be referred to as the lowest order mean motion resonance in the restricted or planetary three-body problem. The well-known five libration points in the circular restricted three-body problem correspond to the five equilibriums of the 1/1 resonance. Trapped in different 1/1 libration modes, the system moves on different types of trajectory in space, such as the tadpole orbits and the horseshoe orbits

chinaXiv:202306.00372v1

ChinaXiv合作期刊

in case of small orbital eccentricity and inclination. In case of moderate or large eccentricity and inclination, it is known that other novel 1/1 libration modes also exist. Coorbital bodies are not rare in the solar system, for example the Trojans asteroids and the coorbital satellite systems of Saturn. Recently, dozens of coorbital bodies with Earth as the host have been identified among the near-Earth asteroids. Due to the orbital precession, the planetary graviational perturbations and other possible effects, these coorbital bodies are believed to transit recurrently between different 1/1 libration modes before their eventual escapes. The Hamiltonian system and the Hill's three-body problem are two effective approaches in the studies of coorbital motion. To apply the perturbation theory to the Hamiltonian system, one first develops the disturbing function into an appropriate form, then uses the normalization procedure or the averaging technique to eliminate the short-period terms in order to lower the degree of freedom of the system. Then, one studies the integrable approximation (or referred to as the ideal resonance model), based on which the theory on the secular evolution may be constructed. The approach of Hamiltonian system can investigate the global dynamics of coorbital motion with suitable expansion of the disturbing function. On the other hand, the Hill's three-body problem focuses mainly on relative motion of two bodies when they are close. The Hill's equation in the context of the circular restricted three-body problem is well known. However, the general Hill's three-body problem whose equation of motion has exactly the same form can handle the non-restricted case where the mass of each body is non-negligible. Under certain assumptions, the equation of motion of the general Hill's three-body problem can be written in a "canonical" form. Based on this canonical form, the averaging technique can be used to construct a perturbation theory on the secular evolution. Besides the two analytical approaches, the numerical methods for the study of coorbital motion involve the continuation of periodic orbit, the surface of section and the calculation of invariant manifold or invariant tori around the equilibrium.

Key words: three-body problem; 1/1 mean motion resonance; coorbital motion

chinaXiv:202306.00372v1